Aufgabe 8.64

Für einen Flug werden Tickets in den Beförderungsklassen Economy und Business angeboten. Die 300 Economyplätze werden zu unterschiedlichen Sonderkonditionen zu Preisen von 20 € und 220 € sowie zum Normalpreis von 420 € verkauft. Die 50 Businessplätze werden zu Sonderkonditionen zum Preis von 600 € und zum Normalpreis von 1000 € verkauft. Aufgrund einer Werbekampagne sollen in den Preiskategorien 20 € und 600 € zusammen mindestens 40 und in den Preiskategorien 220 € und 600 € zusammen mindestens 200 Tickets angeboten werden.

Ermitteln Sie mithilfe der Simplexmethode, welcher Erlös unter diesen Bedingungen maximal erzielbar ist und wieviele Tickets der einzelnen Kategorien dafür verkauft werden müssen! Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen im optimalen Ergebnis?

Lösung:

Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Mit x_1, x_2, x_3, x_4 bzw. x_5 sollen die Zahlen der Tickets zu 20, 220, 420, 600 bzw. 1000 € bezeichnet werden. Dann ist folgende Optimierungsaufgabe zu lösen:

Erlös in €:	$20x_1 + 220x_2 + 420x_3 + 600x_4 + 1000x_5 \to \max$
Economyplätze:	$x_1 + x_2 + x_3 \le 300$
Businessplätze:	$x_4 + x_5 \le 50$
Mindestangebote:	$x_1 + x_4 \ge 40$
	$x_2 + x_4 \ge 200$
Nichtnegativität, Ganzheit:	$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$, ganz

Für die bei der Normalform erforderliche Minimierung und zur Vereinfachung wird die Zielfunktion durch -20 dividiert. Die Ungleichungen werden durch Einführung der Schlupfvariablen x_6 bis x_9 zu Gleichungen. Unter vorübergehendem Verzicht auf die Ganzzahligkeit, die allerdings am Ende auch noch überprüft werden muss, erhält man folgende Normalform:

$$\begin{array}{l}
z' = -\frac{z}{20} = -x_1 - 11x_2 - 21x_3 - 30x_4 - 50x_5 + 0 \longrightarrow \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + \mathbf{x_6} = 300 \\
x_4 + x_5 + \mathbf{x_7} = 50 \\
x_1 + x_4 - x_8 = 40 \\
x_2 + x_4 - x_9 = 200 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9 \ge 0
\end{array}$$

Da die Gleichungen mit x_8 und x_9 keine Variable enthalten, die nur in dieser Zeile vorkommen und dort einen positiven Koeffizienten haben, wird für die Suche nach einer zulässigen Basislösung zu einem Hilfsproblem übergegangen:

$$\begin{array}{l}
h = v_3 + v_4 + 0 \longrightarrow \min \\
x_1 + x_2 + x_3 + \mathbf{x_6} = 300 \\
x_4 + x_5 + \mathbf{x_7} = 50 \\
x_1 + x_4 - x_8 + \mathbf{v_3} = 40 \\
x_2 + x_4 - x_9 + \mathbf{v_4} = 200 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ v_3,\ v_4 \ge 0
\end{array}$$

bzw.
$$\boxed{\begin{array}{rclr}
h=v_3+v_4= & & & +\ \ 0 \longrightarrow \min \\
x_6 & = & -x_1-x_2-x_3 & +300 \\
x_7 & = & -x_4-x_5 & +\ 50 \\
v_3 & = & -x_1 \qquad -x_4 \qquad +x_8 & +\ 40 \\
v_4 & = & -x_2 \qquad -x_4 \qquad +x_9 & +200 \\
\multicolumn{3}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ v_3,\ v_4} & \geq\ \ 0
\end{array}}$$

Damit liegt folgendes Simplextableau für die Hilfsaufgabe vor:

H_0	NBV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_8	x_9		
BV	c	0	0	0	0	0	0	0	0	θ
x_6	0	−1	−1	−1	0	0	0	0	300	—
x_7	0	0	0	0	−1	−1	0	0	50	50
v_3	1	−1	0	0	$\boxed{-1}$	0	1	0	40	$\boxed{40}$
v_4	1	0	−1	0	−1	0	0	1	200	200
		−1	−1	0	$\boxed{-2}$	0	1	1	240	

H_1	NBV	x_1	x_2	x_3	x_5	x_8	x_9		
BV	c	0	0	0	0	0	0	0	θ
x_6	0	−1	−1	−1	0	0	0	300	300
x_7	0	1	0	0	−1	−1	0	10	—
x_4	0	−1	0	0	0	1	0	40	—
v_4	1	1	$\boxed{-1}$	0	0	−1	1	160	$\boxed{160}$
		1	$\boxed{-1}$	0	0	−1	1	160	

H_2	NBV	x_1	x_3	x_5	x_8	x_9		
BV	c	0	0	0	0	0	0	θ
x_6	0	−2	−1	0	1	−1	140	
x_7	0	1	0	−1	−1	0	10	
x_4	0	−1	0	0	1	0	40	
x_2	0	1	0	0	−1	1	160	
		0	0	0	0	0	0	

Alle Δ_j sind gleich 0, also ist das Minimimum der Hilfsaufgabe erreicht. Wegen $h=0$ liegt damit eine zulässige Basislösung der Ausgangsaufgabe vor, so dass das Simplextableau S_0 für die Ausgangsaufgabe notiert werden kann.

S_0	NBV	x_1	x_3	x_5	x_8	x_9		
BV	c	−1	−21	−50	0	0	0	θ
x_6	0	−2	$\boxed{-1}$	0	1	−1	140	$\boxed{140}$
x_7	0	1	0	−1	−1	0	10	—
x_4	−30	−1	0	0	1	0	40	—
x_2	−11	1	0	0	−1	1	160	—
		18	$\boxed{-21}$	−50	−19	−11	−2960	

S_1 BV	NBV c	x_1 -1	x_6 -21	x_5 -50	x_8 0	x_9 0	0	θ
x_3	-21	-2	-1	0	1	-1	140	—
x_7	0	1	0	$\boxed{-1}$	-1	0	10	10
x_4	-30	-1	0	0	1	0	40	—
x_2	-11	1	0	0	-1	1	160	—
		60	21	$\boxed{-50}$	-40	10	-5900	

S_2 BV	NBV c	x_1 -1	x_6 -21	x_7 -50	x_8 0	x_9 0	0	θ
x_3	-21	-2	-1	0	1	-1	140	
x_5	-50	1	0	-1	-1	0	10	
x_4	-30	-1	0	0	1	0	40	
x_2	-11	1	0	0	-1	1	160	
		10	21	50	10	10	-6400	

Alle Optimalitätsindikatoren Δ_j sind größer als 0, so dass bei $x_1=0$, $x_2=160$, $x_3=140$, $x_4=40$, $x_5=10$, $x_6=x_7=x_8=x_9=0$ das eindeutige Optimum der Ausgangsaufgabe erreicht ist, in diesem gilt $z^*=-20z'^*=-20\cdot(-6400)=128\,000$.

Der unter den vorgegebenen Bedingungen maximal erzielbare Erlös von 128 000 € wird erzielt, wenn kein Ticket zu 20 €, 160 Tickets zu 220 €, 140 Tickets zu 420 €, 40 Tickets zu 600 € und 10 Tickets zu 1000 € verkauft werden.

Für den maximalen Erlös muss das Flugzeug voll besetzt sein ($x_6=x_7=0$), obwohl nur die Mindestkontingente der rabattierten Flugscheine verkauft wurden ($x_8=x_9=0$), wie nicht anders zu erwarten war.