Aufgabe 8.63

In einer Stanzerei werden aus Blechtafeln drei verschiedene Teile T_1, T_2 und T_3 gestanzt. Dazu werden vier verschiedene Stanzschablonen S_1, S_2, S_3 und S_4 genutzt. Bei Verwendung dieser Schablonen entstehen folgende Stückzahlen der Teile und Kosten in Geldeinheiten:

	pro Stanzvorgang			
	S_1	S_2	S_3	S_4
Anzahl T_1	1	1	0	0
Anzahl T_2	1	0	1	0
Anzahl T_3	2	4	6	8
Kosten	3	4	4	3

Es ist nun ein Auftrag von 3 T_1, 2 T_2 und 30 T_3 zu stanzen. Ermitteln Sie mit dem Simplexverfahren, wie oft die einzelnen Schablonen zur Anwendung kommen müssen, wenn die Kosten für das Stanzen minimal werden sollen! Wie viele Teile und welche Kosten entstehen dabei?

(vgl. Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. 7. Aufl. Vieweg+Teubner 2009, Übungsaufgabe 4.23, S. 166)

Lösung:

(vgl. Aufgabe 6.131, dort zur Lösung linearer Gleichungssysteme)

Version Austauschverfahren
(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

gesucht: $x_i,\ i=1,2,3,4$: Anzahl der Verwendung von Schablone S_i

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Kosten:} & 3x_1+4x_2+4x_3+3x_4 & \longrightarrow & \min \\
T_1: & x_1+x_2 & \geq & 3 \\
T_2: & x_1+x_3 & \geq & 2 \\
T_3: & 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4 & \geq & 30 \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq & 0 \\
\text{Ganzzahligkeit:} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & & \text{ganz}
\end{array}$$

Die Ungleichungen für T_1 bis T_3 werden durch Subtraktion der Schlupfvariablen x_5 bis x_7 auf der linken Seite zu Gleichungen. Unter vorübergehendem Verzicht auf die Ganzzahligkeit erhält man folgende Normalform (Die Ganzzahligkeit muss am Ende auch noch überprüft werden.):

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
3x_1+4x_2+4x_3+3x_4 & + & 0 \longrightarrow \min \\
x_1+x_2-x_5 & = & 3 \\
x_1+x_3-x_6 & = & 2 \\
2x_1+4x_2+6x_3+8x_4-x_7 & = & 30 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 & \geq & 0
\end{array}}$$

Da die Gleichungen keine Variablen enthalten, die nur in der jeweiligen Gleichung vorkommen und dort einen positiven Koeffizienten haben, wird für die Suche nach einer zulässigen Basislösung zu einem Hilfsproblem übergegangen:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
v_1+v_2+v_3 & + & 0 \longrightarrow \min \\
x_1+x_2-x_5+\mathbf{v_1} & = & 3 \\
x_1+x_3-x_6+\mathbf{v_2} & = & 2 \\
2x_1+4x_2+6x_3+8x_4-x_7+\mathbf{v_3} & = & 30 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ v_1,\ v_2,\ v_3 & \geq & 0
\end{array}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrrrrrl} h = v_1+v_2+v_3 & & & & & & & & & +\ 0 \longrightarrow \min \\ v_1 = & -x_1 & -x_2 & & & +x_5 & & & & +\ 3 \\ v_2 = & -x_1 & & -x_3 & & & +x_6 & & & +\ 2 \\ v_3 = & -2x_1 & -4x_2 & -6x_3 & -8x_4 & & & +x_7 & & +30 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0 \end{array}}$$

H_0 / BV	NBV / c	x_1 / 0	x_2 / 0	x_3 / 0	x_4 / 0	x_5 / 0	x_6 / 0	x_7 / 0	0	θ
v_1	1	-1	-1	0	0	1	0	0	3	—
v_2	1	-1	0	-1	0	0	1	0	2	—
v_3	1	-2	-4	-6	$\boxed{-8}$	0	0	1	30	$\boxed{\frac{15}{4}}$
		-4	-5	-7	$\boxed{-8}$	1	1	1	35	

Es erfolgt ein Austausch mit Spaltentilgung, da v_i als Nichtbasisvariable 0 gesetzt werden kann:

H_1 / BV	NBV / c	x_1 / 0	x_2 / 0	x_3 / 0	x_5 / 0	x_6 / 0	x_7 / 0	0	θ
v_1	1	-1	-1	0	1	0	0	3	3
v_2	1	$\boxed{-1}$	0	-1	0	1	0	2	$\boxed{2}$
x_4	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{4}$	15
		$\boxed{-2}$	-1	-1	1	1	0	5	

H_2 / BV	NBV / c	x_2 / 0	x_3 / 0	x_5 / 0	x_6 / 0	x_7 / 0	0	θ
v_1	1	$\boxed{-1}$	1	1	-1	0	1	$\boxed{1}$
x_1	0	0	-1	0	1	0	2	—
x_4	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{13}{2}$
		$\boxed{-1}$	1	1	-1	0	1	

H_3 / BV	NBV / c	x_3 / 0	x_5 / 0	x_6 / 0	x_7 / 0	0	θ
x_2	0	1	1	-1	0	1	
x_1	0	-1	0	1	0	2	
x_4	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{4}$	
		0	0	0	0	0	

Alle Δ_j sind gleich 0, also ist das Minimimum der Hilfsaufgabe erreicht. Wegen $h=0$ liegt damit eine zulässige Basislösung der Ausgangsaufgabe vor, so dass das Simplextableau S_0 für die Ausgangsaufgabe notiert werden kann.

S_0 / BV	NBV / c	x_3 / 4	x_5 / 0	x_6 / 0	x_7 / 0	0	θ
x_2	4	1	1	$\boxed{-1}$	0	1	$\boxed{1}$
x_1	3	-1	0	1	0	2	—
x_4	3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{4}$	—
		2	$\frac{5}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{73}{4}$	

S_1 / BV	NBV / c	x_3 / 4	x_5 / 0	x_2 / 4	x_7 / 0	0	θ
x_6	0	1	1	-1	0	1	
x_1	3	0	1	-1	0	3	
x_4	3	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	3	
		$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	18	

Alle Optimalitätsindikatoren Δ_j sind größer als 0, so dass bei $x_1 = x_4 = 3,\ x_6 = 1,\ x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$ das eindeutige Minimum der Ausgangsaufgabe erreicht ist. Diese Lösung erfüllt auch die Ganzzahligkeitsforderung. Es ist also je 3 mal mit den Stanzschablonen S_1 und S_4 zu stanzen, es entstehen Kosten in Höhe von 18 Geldeinheiten. Dabei wird $x_6 = 1$ Teil T_2 zu viel gefertigt.