Aufgabe 8.60

In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden 40 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden 20 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € erlöst. Es stehen **höchstens** je 800 hl Gartenerde und Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber **mindestens** 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf!
b) Wenden Sie das grafische Lösungsverfahren auf das Modell an! Welche Schlussfolgerung ergibt sich?
c) Wenden Sie das Simplexverfahren auf das Modell an!

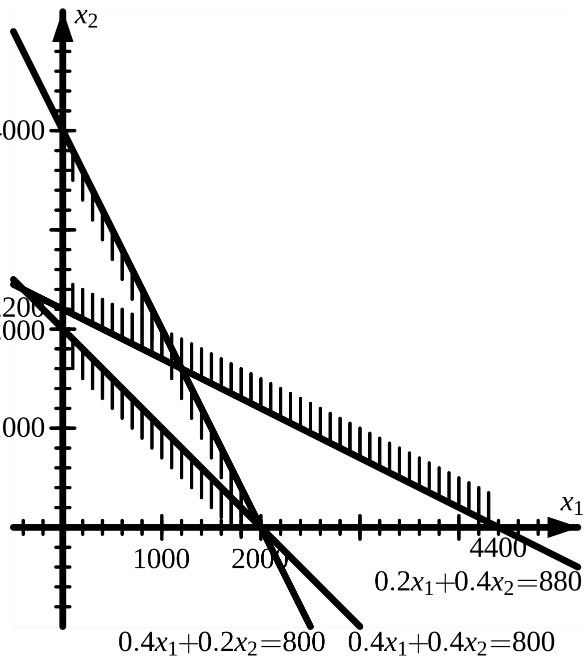
Lösung:

a)

ges.: x_1: herzustellendes Substrat A in hl,
x_2: herzustellendes Substrat B in hl

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Gewinn:} & 3\,x_1 + 5\,x_2 & \longrightarrow & \max \\
\text{Gartenerde:} & 0.4x_1 + 0.2x_2 & \leq & 800 \\
\text{Füllstoffe:} & 0.4x_1 + 0.4x_2 & \leq & 800 \\
\text{Kompost:} & 0.2x_1 + 0.4x_2 & \geq & 880 \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b)



Der zulässige Bereich ist leer, also ist die Aufgabe unlösbar.

c) **Version Gaußalgorithmus**
(Lit.: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Es empfiehlt sich, die Ungleichungen zunächst durch 0.2 bzw. 0.4 zu teilen. Zur Überführung in die Normalform müssen Schlupfvariablen eingeführt werden. Man erhält:

$$\boxed{\begin{array}{lcr}
3x_1 + 5x_2 & \longrightarrow & \max \\
2x_1 + x_2 + \boldsymbol{u_1} & = & 4000 \\
x_1 + x_2 \qquad + \boldsymbol{u_2} & = & 2000 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - u_3 & = & 4400 \\
x_1,\quad x_2,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3 & \geq & 0
\end{array}}$$

Die dritte Gleichung enthält keine Variable, die nur in dieser Zeile vorkommt und dort einen positiven Koeffizienten hat. Deshalb kann keine Basislösung abgelesen werden, vielmehr muss zu ihrer Bestimmung (oder zum Ausschluss ihrer Existenz) eine Hilfsaufgabe eingeführt werden:

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
 & -v_3 \longrightarrow & \max \\
2x_1 + x_2 + \mathbf{u_1} & = & 4000 \\
x_1 + x_2 \quad + \mathbf{u_2} & = & 2000 \\
x_1 + 2x_2 \qquad - u_3 + \mathbf{v_3} & = & 4400 \\
x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ v_3 & \geq & 0
\end{array}}
$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_3		
BV	c_B	0	0	0	0	0	−1	x_B	θ
u_1	0	2	1	**1**	**0**	0	**0**	4000	4000
u_2	0	1	1	**0**	**1**	0	**0**	2000	$\boxed{2000}$
v_3	−1	1	2	**0**	**0**	−1	**1**	4400	2200
		−1	$\boxed{-2}$	**0**	**0**	1	**0**	−4400	
u_1	0	1	**0**	**1**	−1	0	**0**	2000	
x_2	0	1	**1**	**0**	1	0	**0**	2000	
v_3	−1	−1	**0**	**0**	−2	−1	**1**	400	
		1	**0**	**0**	2	1	**0**	−400	

Alle Optimalitätsindikatoren Δ_j sind nichtnegativ, so dass das Maximum der Hilfsaufgabe erreicht ist. Es beträgt −400. Da es nicht gleich 0 ist, ist der zulässige Bereich der Ausgangsaufgabe leer, die Aufgabe damit unlösbar.

Version Austauschverfahren
(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Es empfiehlt sich, die Ungleichungen zunächst durch 0.2 bzw. 0.4 zu teilen. Zur Überführung in die Normalform müssen die Zielfunktion mit −1 multipliziert und Schlupfvariablen eingeführt werden. Man erhält:

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
-3x_1 - 5x_2 \qquad\qquad + & 0 & \longrightarrow \min \\
2x_1 + x_2 + \mathbf{x_3} \qquad & = & 4000 \\
x_1 + x_2 \quad + \mathbf{x_4} & = & 2000 \\
x_1 + 2x_2 \qquad - x_5 & = & 4400 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0
\end{array}}
$$

Die dritte Gleichung enthält keine Variable, die nur in dieser Zeile vorkommt und dort einen positiven Koeffizienten hat. Deshalb kann keine Basislösung abgelesen werden, vielmehr muss zu ihrer Bestimmung (oder zum Ausschluss ihrer Existenz) eine Hilfsaufgabe eingeführt werden:

$$
\boxed{\begin{array}{rcl}
 & v_3 \longrightarrow & \min \\
2x_1 + x_2 + \mathbf{x_3} & = & 4000 \\
x_1 + x_2 \quad + \mathbf{x_4} & = & 2000 \\
x_1 + 2x_2 \qquad - x_5 + \mathbf{v_3} & = & 4400 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ v_3 & \geq & 0
\end{array}}
\quad \text{bzw.} \quad
\boxed{\begin{array}{lcl}
h = v_3 & & \longrightarrow \min \\
x_3 = -2x_1 - x_2 & + & 4000 \\
x_4 = \ \ -x_1 - x_2 & + & 2000 \\
v_3 = \ \ -x_1 - 2x_2 + x_5 & + & 4400 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ v_3 & \geq & 0
\end{array}}
$$

H_0	NBV	x_1	x_2	x_5		
BV	c	0	0	0	0	θ
x_3	0	−2	−1	0	4000	4000
x_4	0	−1	$\boxed{-1}$	0	2000	$\boxed{2000}$
v_3	1	−1	−2	1	4400	2200
		−1	$\boxed{-2}$	1	4400	

H_1	NBV	x_1	x_4	x_5		
BV	c	0	0	0	0	θ
x_3	0	−1	1	0	2000	
x_2	0	−1	−1	0	2000	
v_3	1	1	2	1	400	
		1	2	1	400	

Im Schema H_1 sind alle Optimalitätsindikatoren Δ_j nichtnegativ, so dass das Minimum der Hilfsaufgabe erreicht ist. Es beträgt 400. Da es nicht gleich 0 ist, ist der zulässige Bereich der Ausgangsaufgabe leer, die Aufgabe damit unlösbar.