Aufgabe 8.57

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rl} -16x_1+3x_2+x_3-x_4+x_5+5900 & \longrightarrow \max \\ -x_1+2x_2+2x_3-x_4+x_5 = & 420 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5 = & 20 \\ x_1\le 400,\ x_2\ge 200,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0 & \end{array}$$
mit Hilfe der Simplexmethode die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Lösung:

I. Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Variable: $x_1'=400-x_1\ge 0,\ x_1=400-x_1',\quad x_2'=x_2-200\ge 0,\ x_2=x_2'+200,$

Zielfunktion: $z=-16(400-x_1')+3(x_2'+200)+x_3-x_4+x_5+5900=16x_1'+3x_2'+x_3-x_4+x_5+100,$
$z'=16x_1'+3x_2'+x_3-x_4+x_5,\ \ z=z'+100$

Nebenbedingungen: $-(400-x_1')+2(x_2'+200)+2x_3-x_4+x_5=420,\ \ x_1'+2x_2'+2x_3-x_4+x_5=420,$
$(400-x_1')-(x_2'+200)+x_3-2x_4+x_5=20,\ \ -x_1'-x_2'+x_3-2x_4+x_5=-180,$
$x_1'+x_2'-x_3+2x_4-x_5=\ \ 180$

Normalform:
$$\boxed{\begin{array}{rl} z'=z-100=16x_1'+3x_2'+x_3-x_4+x_5 & \longrightarrow \max \\ x_1'+2x_2'+2x_3-x_4+x_5 & = 420 \\ x_1'+x_2'-x_3+2x_4-x_5 & = 180 \\ x_1',\ x_2',\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \ge 0 \end{array}}$$

Ersatzaufgabe:
$$\boxed{\begin{array}{rl} h=\qquad -v_1-v_2 & \longrightarrow \max \\ x_1'+2x_2'+2x_3-x_4+x_5+v_1 & = 420 \\ x_1'+x_2'-x_3+2x_4-x_5+v_2 & = 180 \\ x_1',\ x_2',\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ v_1,\ v_2 & \ge 0 \end{array}}$$

BV	x_B	x_1' 0	x_2' 0	x_3 0	x_4 0	x_5 0	v_1 −1	v_2 −1	x_B	θ
v_1	−1	1	2	2	−1	1	1	0	420	210
v_2	−1	1	1	−1	2	−1	0	1	180	$\boxed{180}$
		−2	$\boxed{-3}$	−1	−1	0	0	0	−600	
v_1	−1	−1	0	4	−5	3	1	−2	60	$\boxed{15}$
x_2'	0	1	1	−1	2	−1	0	1	180	—
		1	0	$\boxed{-4}$	5	−3	0	3	−60	
x_3	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	15	
x_2'	0	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	195	
		0	0	0	0	0	1	1	0	

alle $\Delta_j\ge 0 \Longrightarrow$ Max. der Ersatzaufgabe mit $h=0$
$\Longrightarrow$ zul. BL d. Normalform

BV	x_B	x'_1 16	x'_2 3	x_3 1	x_4 -1	x_5 1	x_B	θ
x_3	1	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	15	—
x'_2	3	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	195	$\boxed{260}$
		$\boxed{-14}$	0	0	2	-1	600	
x_3	1	0	$\frac{1}{3}$	1	-1	$\frac{2}{3}$	80	$\boxed{120}$
x'_1	16	1	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	260	—
		0	$\frac{56}{3}$	0	16	$\boxed{-\frac{17}{3}}$	4240	
x_5	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	120	
x'_1	16	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	300	
		0	$\frac{43}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{15}{2}$	0	4920	

alle $\Delta_j \geq 0 \Longrightarrow z' = 4920$ Max. der Normalform, optimale Lösung:
$x'_1 = 300,\ x'_2 = x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 120$

Da die Optimalitätsindikatoren für die Nichtbasisvariablen positiv sind, liegt ein eindeutiges Maximum vor. Die optimale Lösung der Ausgangsaufgabe ist $x_1 = 400 - x'_1 = 100$, $x_2 = x'_2 + 200 = 200$, $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 120$, dort wird das Maximum der Zielfunktion mit $z = z' + 100 = 5020$ erreicht.

II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Variable: $x'_1 = 400 - x_1 \geq 0,\ \ x_1 = 400 - x'_1,\qquad x'_2 = x_2 - 200 \geq 0,\ \ x_2 = x'_2 + 200,$

Zielfunktion: $z = -16(400 - x'_1) + 3(x'_2 + 200) + x_3 - x_4 + x_5 + 5900 = 16x'_1 + 3x'_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 100,$
$z' = -z = -16x'_1 - 3x'_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 100 \longrightarrow \min$

Nebenbedingungen: $-(400 - x'_1) + 2(x'_2 + 200) + 2x_3 - x_4 + x_5 = 420,\ \ x'_1 + 2x'_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 420,$
$(400 - x'_1) - (x'_2 + 200) + x_3 - 2x_4 + x_5 = 20,\ \ -x'_1 - x'_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -180,$
$x'_1 + x'_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 180$

Normalform:
$$\boxed{\begin{array}{rl} z' = -z = -16x'_1 - 3x'_2 - x_3 + x_4 - x_5 & -\ 100 \longrightarrow \min \\ x'_1 + 2x'_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 & =\ 420 \\ x'_1 + x'_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 & =\ 180 \\ x'_1,\ x'_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq\ 0 \end{array}}$$

Hilfsproblem:
$$\boxed{\begin{array}{rl} h = v_1 + v_2 & +\ \ 0 \longrightarrow \min \\ x'_1 + 2x'_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + v_1 & =\ 420 \\ x'_1 + x'_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + v_2 & =\ 180 \\ x'_1,\ x'_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ v_1,\ v_2 & \geq\ 0 \end{array}}$$

bzw.
$$\boxed{\begin{array}{rl} h = & v_1 + v_2 + \ 0 \longrightarrow \min \\ v_1 = -x'_1 - 2x'_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 & +420 \\ v_2 = -x'_1 - x'_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & +180 \\ x'_1,\ x'_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq\ 0 \end{array}}$$

H_0	NBV	x_1'	x_2'	x_3	x_4	x_5		
BV	c	0	0	0	0	0	0	θ
v_1	1	-1	-2	-2	1	-1	420	210
v_2	1	-1	$\boxed{-1}$	1	-2	1	180	$\boxed{180}$
		-2	$\boxed{-3}$	-1	-1	0	600	

H_1	NBV	x_1'	v_2	x_3	x_4	x_5		
BV	c	0	1	0	0	0	0	θ
v_1	1	1	2	$\boxed{-4}$	5	-3	60	$\boxed{15}$
x_2'	0	-1	-1	1	-2	1	180	—
		1	3	$\boxed{-4}$	5	-3	60	

H_2	NBV	x_1'	v_2	v_1	x_4	x_5		
BV	c	0	1	1	0	0	0	θ
x_3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	15	
x_2'	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	195	
		0	0	0	0	0	0	

alle $\Delta_j \geq 0$
$\Longrightarrow$ Minimum des Hilfsproblems mit $h=0$
$\Longrightarrow$ zulässige Basislösung der Normalform

S_0	NBV	x_1'	x_4	x_5		
BV	c	-16	1	-1	-100	θ
x_3	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	15	—
x_2'	-3	$\boxed{-\frac{3}{4}}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	195	$\boxed{260}$
		$\boxed{-14}$	2	-1	-700	

S_1	NBV	x_2'	x_4	x_5		
BV	c	-3	1	-1	-100	θ
x_3	-1	$-\frac{1}{3}$	1	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	80	$\boxed{120}$
x_1'	-16	$-\frac{4}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	260	—
		$\frac{56}{3}$	16	$\boxed{-\frac{17}{3}}$	-4340	

S_2	NBV	x_2'	x_4	x_3		
BV	c	-3	1	-1	-100	θ
x_5	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	120	
x_1'	-16	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	300	
		$\frac{43}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	-5020	

alle $\Delta_j > 0$
$\Longrightarrow z' = -5020$ eindeutiges Min. d. Normalform,
opt. Lösung: $x_1' = 300$, $x_2' = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 120$

Optimale Lösung der Ausgangsaufgabe ist damit $x_1 = 400 - x_1' = 100$, $x_2 = x_2' + 200 = 200$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 120$, dort wird das Maximum der Zielfunktion mit $z = -z' = 5020$ erreicht.