Aufgabe 8.54

Lösen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rl} -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3 & \to \max \\ x_1 \qquad - x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq 0 \end{array}$$

mit dem Simplexverfahren!

Lösung:

I. Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Ersetzt man die Zielfunktion durch $z' = z+3$, so befindet sich die Aufgabe bereits in Normalform. Eine 1. Basislösung ist nicht direkt ablesbar, da die 1. Gleichung keine Variable enthält, die nur in dieser Gleichung vorkommt und dort einen positiven Koeffizienten hat. Deshalb wird in der 1. Zeile eine künstliche Variable v_1 eingeführt. Die 2. Gleichung enthält dagegen mit x_2 eine Variable, die nur in dieser Gleichung vorkommt und dort einen positiven Koeffizienten hat. Für die 2. Gleichung reicht es also, sie durch diesen Koeffizienten 2 zu dividieren.

Die Hilfsaufgabe mit künstlicher Variable v_1 und Hilfszielfunktion lautet dann

$$\boxed{\begin{array}{llll} h = & -v_1 & \longrightarrow & \max \\ & x_1 \quad -x_3 + \mathbf{v_1} & = & 1 \\ & \frac{x_1}{2} + \mathbf{x_2} + \frac{x_3}{2} & = & \frac{3}{2} \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ v_1 & \geq & 0 \end{array}}$$

BV	c_B	x_1 0	x_2 0	x_3 0	v_1 −1	x_B	θ	
v_1	−1	1	**0**	−1	**1**	1	$\boxed{1}$	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{3}{2}$	3	
		$\boxed{-1}$	**0**	1	**0**	−1		
x_1	0	**1**	**0**	−1	1	1		alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Max. der Hilfsaufg. mit $h=0$
x_2	0	**0**	**1**	1	$-\frac{1}{2}$	1		$\implies x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$
		0	**0**	0	1	0		ist zulässige BL der Ausgangsaufgabe.

Beim Übergang zur Ausgangsaufgabe werden die künstlichen Variablen gestrichen und die Zielfunktionskoeffizienten in den Zeilen- und Spaltenköpfen durch die Zielfunktionskoeffizienten der Zielfunktion $z' = -x_1 + x_2 + 3x_3$ der Normalform der Ausgangsaufgabe ersetzt.

BV	c_B	x_1 −1	x_2 1	x_3 3	x_B	θ	
x_1	−1	**1**	**0**	−1	1	—	1. zulässige BL der Ausgangsaufgabe $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$
x_2	1	**0**	**1**	1	1	$\boxed{1}$	x_2 aus Basis ausschließen
		0	**0**	$\boxed{-1}$	0		x_3 in Basis aufnehmen
x_1	−1	**1**	1	**0**	2		alle $\Delta_j \geq 0$, $\Delta_j = 0$ nur für die beiden Basisvariablen
x_3	3	**0**	1	**1**	1		$\implies$ eindeutiges Optimum bei $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$
		0	1	**0**	1		

Die eindeutige optimale Lösung wird also bei $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ erreicht, maximaler Zielfunktionswert ist $z^* = z'^* - 3 = -2 + 0 + 3 \cdot 1 - 3 = 1 - 3 = -2$.

II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Zur Herstellung der Normalform muss lediglich die Zielfunktion mit -1 durchmultipliziert werden:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} z' = -z = x_1 - & x_2 - & 3x_3 & +3 & \longrightarrow \min \\ x_1 & & - \ x_3 & = 1 & \\ x_1 + & 2x_2 + & x_3 & = 3 & \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{array}}$$

Nur die 2. Zeile des Gleichungssystems enthält eine Variable, die nur in dieser Zeile vorkommt un dort einen positivne Koeffizienten hat. Deshalb kann keine Basislösung abgelesen werden, sie muss mit einem Hilfsproblem ermittelt werden. In der 1. Zeile wird dazu eine künstliche Variable v_1 eingeführt. Die 2. Zeile muss lediglich durch den Koeffizienten 2 dividiert werden. Somit entsteht das Hilfsproblem

$$\boxed{\begin{array}{lrl} h = & v_1 & + \ 0 \longrightarrow \min \\ x_1 & -x_3 + \mathbf{v_1} & = \ 1 \\ \frac{x_1}{2} + \mathbf{x_2} + \frac{x_3}{2} & & = \ \frac{3}{2} \\ x_1, \ x_2, \ x_3, \ v_1 & & \geq \ 0 \end{array}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{array}{lrl} h = & v_1 + \ 0 & \longrightarrow \min \\ v_1 = -x_1 + x_3 & + \ 1 & \\ x_2 = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{2} & + \ \frac{3}{2} & \\ x_1, \ x_2, \ x_3, \ v_1 & \geq \ 0 & \end{array}}$$

H_0 / BV	NBV / c	x_1 / 0	x_3 / 0	0	θ
v_1	1	$\boxed{-1}$	1	1	$\boxed{1}$
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
		$\boxed{-1}$	1	1	

H_1 / BV	NBV / c	v_1 / 1	x_3 / 0	0	θ
x_1	0	-1	1	1	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	-1	1	
		1	0	0	

alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Minimum des Hilfsproblems mit $h = 0$
$\implies x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$
ist zulässige Basislösung des Ausgangsproblems.

Beim Übergang zur Ausgangsaufgabe werden die künstlichen Variablen gestrichen und die Zielfunktionskoeffizienten in den Zeilen- und Spaltenköpfen durch die Zielfunktionskoeffizienten der Zielfunktion $z' = x_1 - x_2 - 3x_3 + 3$ der Normalform der Ausgangsaufgabe ersetzt.

S_0 / BV	NBV / c	x_3 / -3	3	θ
x_1	1	1	1	—
x_2	-1	$\boxed{-1}$	1	$\boxed{1}$
		$\boxed{-1}$	3	

1. zulässige Basislösung der Ausgangsaufgabe $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$
x_2 aus Basis ausschließen
x_3 in Basis aufnehmen

S_1	NBV	x_2		
BV	c	-1	3	θ
x_1	1	-1	2	
x_3	-3	-1	1	
		1	2	

alle $\Delta_j > 0 \implies$ eindeutiges Optimum bei $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$

Die eindeutige optimale Lösung wird also bei $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ erreicht, maximaler Zielfunktionswert ist $z^* = -z'^* = -2 + 0 + 3 \cdot 1 - 3 = -2$