Aufgabe 8.53

In einer Mensa werden die Essen 1 bis 4 (damit in der Klausur, in der die Aufgabe erstmals gestellt worden ist, mit einfachen Zahlen gerechnet werden konnte) auch zu Preisen von 1 bis 4 € verkauft. Für die einzelnen Essen entstehen Personalkosten, Wareneinsatz und sonstige Sachkosten in der in folgender Tabelle angegebenen Höhe, wobei diese Kosten insgesamt jeweils die angegebenen Fonds nicht überschreiten dürfen:

Verkaufte Portionen	Essen 1	Essen 2	Essen 3	Essen 4	Fonds
Personalkosten pro Portion	1	2	2	2	3400
Wareneinsatz pro Portion	1	1	2	2	3000
Sonstige Sachkosten pro Portion	2	2	2	3	3900
Verkaufspreis je Portion	1	2	3	4	

Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Umsatz (Erlös) maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell der Optimierungsaufgabe auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Wie viele Portionen der einzelnen Essen sind für maximalen Umsatz zu verkaufen, welcher Umsatz ist erzielbar?
c) Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexalgorithmus ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Lösung:

a) gesuchte Größen: x_i: Zahl der zu verkaufenden Essen i $(i=1,2,3,4)$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Zielfunktion:} & \text{Umsatz:} & x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \longrightarrow \max \\
\text{Nebenbedingungen:} & \text{Personalkosten:} & x_1+2x_2+2x_3+2x_4 \leq 3400 \\
 & \text{Wareneinsatz:} & x_1+\ x_2+2x_3+2x_4 \leq 3000 \\
 & \text{Sonstige Sachkosten:} & 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4 \leq 3900 \\
 & \text{Nichtnegativität:} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \\
 & \text{(Ganzzahligkeit:} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ \text{ganz)}
\end{array}
$$

b) **I. Version Gaußalgorithmus**

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Normalform:

$$
\boxed{
\begin{array}{rl}
z = & x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \longrightarrow \max \\
& x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\boldsymbol{u_1} = 3400 \\
& x_1+\ x_2+2x_3+2x_4 \quad +\boldsymbol{u_2} = 3000 \\
& 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4 \quad\quad +\boldsymbol{u_3} = 3900 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0
\end{array}
}
$$

Simplexschema:

		x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	1	2	3	4	0	0	0	x_B	θ
u_1	0	1	2	2	2	1	0	0	3400	1700
u_2	0	1	1	2	2	0	1	0	3000	1500
u_3	0	2	2	2	3	0	0	1	3900	$\boxed{1300}$
		-1	-2	-3	$\boxed{-4}$	0	0	0		
u_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	800	1200
u_2	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	400	$\boxed{600}$
x_4	4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	1300	1950
		$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	5200	
u_1	0	0	1	0	0	1	-1	0	400	
x_3	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{3}{2}$	-1	600	
x_4	4	1	1	0	1	0	-1	1	900	
		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	5400	

Alle Optimalitätsindikatoren Δ_j sind größer als 0. Also hat die Ausgangsaufgabe bei $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 600,\ x_4 = 900,\ u_1 = 400,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$ das eindeutige Maximum $z = 5400$.

Der maximale Umsatz von 5400 € wird erzielt, wenn 600 Essen 3, 900 Essen 4 und keine Essen 1 und 2 verkauft werden.

II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rl} z' = -z = - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & + \quad 0 \longrightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \boldsymbol{u_1} \qquad\qquad & = 3400 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \quad + \boldsymbol{u_2} \qquad & = 3000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + \boldsymbol{u_3} & = 3900 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ u_1,\ u_2,\ u_3 & \geq \ 0 \end{array}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{array}{rcll} z' &=& x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & + \quad 0 \longrightarrow \min \\ u_1 &=& - x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 & + 3400 \\ u_2 &=& - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 & + 3000 \\ u_3 &=& -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 & + 3900 \\ && x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ u_1,\ u_2,\ u_3 & \geq \quad 0 \end{array}}$$

S_0	NBV	x_1	x_2	x_3	x_4		
BV	c	-1	-2	-3	-4	0	θ
u_1	0	-1	-2	-2	-2	3400	1700
u_2	0	-1	-1	-2	-2	3000	1500
u_3	0	-2	-2	-2	$\boxed{-3}$	3900	$\boxed{1300}$
		-1	-2	-3	$\boxed{-4}$	0	

S_1	NBV	x_1	x_2	x_3	u_3		
BV	c	-1	-2	-3	0	0	θ
u_1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	800	1200
u_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$	400	$\boxed{600}$
x_4	-4	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1300	1950
		$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$\frac{4}{3}$	-5200	

S_2	NBV	x_1	x_2	u_2	u_3		
BV	c	-1	-2	0	0	0	θ
u_1	0	0	-1	1	0	400	
x_3	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	600	
x_4	-4	-1	-1	1	-1	900	
		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-5400	

Im Schema S_2 sind alle Optimalitätsindikatoren Δ_j größer als 0. Also hat die Ausgangsaufgabe bei $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=600,\ x_4=900,\ u_1=400,\ u_2=0,\ u_3=0$ das eindeutige Maximum $z=-z'=5400$.

Der maximale Umsatz von 5400 € wird erzielt, wenn 600 Essen 3, 900 Essen 4 und keine Essen 1 und 2 verkauft werden.

c) Die Schlupfvariablen geben an, wie viele Einheiten der Rohstoffe beim optimalen Ergebnis nicht verbraucht werden:

400 € der für Personalkosten zur Verfügung stehenden Mittel werden nicht verbraucht, während die Mittel für Wareneinsatz und sonstige Sachkosten vollständig verbraucht werden.