Aufgabe 8.52

Für die Herstellung von drei Sorten Fleischsalat stehen 50 kg Fleischwurst, 14 kg Mayonnaise und 720 Gewürzgurken zur Verfügung. Der pro Einheit der einzelnen Sorten zu erzielende Gewinn und entstehende Materialbedarf ist in folgender Tabelle dargestellt:

	Sorte A	Sorte B	Sorte C
Gewinn	5 €	5 €	8 €
Fleischwurst	3 kg	2 kg	4 kg
Mayonnaise	2 kg	3 kg	1 kg
Gewürzgurken	50	40	60

Aufgrund vertraglicher Bindung sind mindestens 2 Einheiten Sorte A herzustellen. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Gewinn maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell der Optimierungsaufgabe auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Wie viele Einheiten der einzelnen Sorten sind herzustellen, welcher Gewinn ist erzielbar?
c) Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexalgorithmus ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Lösung:

a) gesuchte Größen: x_1: Zahl der herzustellenden Einheiten Sorte A,
x_2: Zahl der herzustellenden Einheiten Sorte B,
x_3: Zahl der herzustellenden Einheiten Sorte C

Zielfunktion:	Gewinn:	$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \longrightarrow \max$
Nebenbedingungen:	Fleischwurst:	$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 50$
	Mayonnaise:	$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 14$
	Gewürzgurken:	$50x_1 + 40x_2 + 60x_3 \leq 720$
	fest vereinbart:	$x_1 \geq 2,$
	Nichtnegativität:	$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

b) **Version Austauschverfahren**
(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Variable: $x_1' = x_1 - 2 \geq 0,\ \ x_1 = x_1' + 2$

ZF: $z = 5(x_1'+2) + 5x_2 + 8x_3 \longrightarrow \max$, d.h. $z' = -z = -5x_1' - 5x_2 - 8x_3 - 10 \longrightarrow \min$

NB:
$$\begin{aligned}
3(x_1'+2) + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 50, \text{ d.h. } & 3x_1' + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 44\\
2(x_1'+2) + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 14, \text{ d.h. } & 2x_1' + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 10\\
50(x_1'+2) + 40x_2 + 60x_3 + x_6 &= 720, \text{ d.h. } & 50x_1' + 40x_2 + 60x_3 + x_6 &= 620
\end{aligned}$$

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrrrrl}
z' = -5x_1' & -5x_2 & -8x_3 & & & & -10 & \longrightarrow \min\\
3x_1' & +2x_2 & +4x_3 & +\mathbf{x_4} & & & = & 44\\
2x_1' & +3x_2 & +x_3 & & +\mathbf{x_5} & & = & 10\\
50x_1' & +40x_2 & +60x_3 & & & +\mathbf{x_6} & = & 620\\
x_1', & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{array}{rrrrl}
z' = -5x_1' & -5x_2 & -8x_3 & -10 & \longrightarrow \min\\
x_4 = -3x_1' & -2x_2 & -4x_3 & +44 & \\
x_5 = -2x_1' & -3x_2 & -x_3 & +10 & \\
x_6 = -50x_1' & -40x_2 & -60x_3 & +620 & \\
x_1',\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & & \geq & 0 &
\end{array}}$$

S_0	NBV	x_1'	x_2	x_3		
BV	c	-5	-5	-8	-10	θ
x_4	0	-3	-2	-4	44	11
x_5	0	-2	-3	$\boxed{-1}$	10	$\boxed{10}$
x_6	0	-50	-40	-60	620	$\frac{31}{3}$
		-5	-5	$\boxed{-8}$	-10	

S_1	NBV	x_1'	x_2	x_5		
BV	c	-5	-5	0	-10	θ
x_4	0	5	10	4	4	
x_3	-8	-2	-3	-1	10	
x_6	0	70	140	60	20	
		11	19	8	-90	

Alle Δ_j sind positiv, also ist das eindeutige Optimum erreicht bei $x_1' = 0 \longrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 10,\ x_4 = 4,\ x_5 = 0,\ x_6 = 20,\ z' = -90 \longrightarrow z = 90.$

Somit sind 2 Einheiten Sorte A und 10 Einheiten Sorte C herzustellen, dabei wird ein Gewinn von 90 € erzielt.

c) Es bleiben 4 kg Fleischwurst, 0 kg Mayonnaise und 20 Gewürzgurken übrig.