Aufgabe 8.51

In einem Landwirtschaftsbetrieb werden Kühe und Schafe gehalten. Der Betrieb verfügt über Ställe für 75 Kühe und 300 Schafe sowie über 27 ha Weideland. Von letzterem werden pro Kuh 2500 m^2 und pro Schaf 500 m^2 benötigt. Zur Versorgung des Viehs können jährlich bis zu 15000 Arbeitsstunden geleistet werden. Für eine Kuh sind jährlich 150, für ein Schaf jährlich 25 Arbeitsstunden erforderlich. Der jährlich erzielbare Gewinn beträgt 100 € pro Kuh und 18 € pro Schaf.

Überführen Sie das mathematische Modell (Aufgabe 8.9) in Normalform und lösen Sie die Aufgabe mit dem Simplexverfahren! Welcher Gewinn ist maximal erzielbar? Welche Bedeutung haben die in der optimalen Lösung erreichten Werte der Schlupfvariablen?

Lösung:

Modell laut Aufgabe 8.9:

gesucht:	x_1: Anzahl Kühe, x_2: Anzahl Schafe				
Gewinn:	$z = 100x_1 + 18x_2$	$\longrightarrow$	max		
Ställe:	x_1	$\leq$	75		
	x_2	$\leq$	300		
Weideland:	$0.25x_1 + 0.05x_2$	$\leq$	27	$\widehat{=}$	$5x_1 + x_2 \leq 540$
Arbeitszeit:	$150x_1 + 25x_2$	$\leq$	15000	$\widehat{=}$	$6x_1 + x_2 \leq 600$
Nichtnegativität:	$x_1, \quad x_2$	$\geq$	0,	außerdem Ganzzahligkeit	

Für die rechnerische Lösung muss das mathematische Modell in eine Normalform überführt werden, auf die dann das Simplex-Verfahren angewendet werden kann. Je nach verwendeter Version des Simplexverfahrens gibt es verschiedene „Normalformen“.

Bei der angegebenen Modellform liegen für x_1 und x_2 jeweils Beschränkungen nach oben und unten vor. Zweckmäßigerweise kann man die Nichtnegativitätsbedingungen so verwenden, wie sie gegeben sind, und die Beschränkungen nach oben in der Normalform durch Schlupfvariablen realisieren. Es wäre aber auch das umgekehrte Vorgehen möglich, dann müssten freilich x_1 und x_2 transformiert werden.

Die Ganzzahligkeit spielt für das Simplexverfahren keine Rolle, sie muss allerdings am Ende für das Ergebnis gewährleistet werden.

I. Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
z' = \dfrac{z}{2} = 50x_1 + 9x_2 & \longrightarrow & \max \\
x_1 \qquad + \boldsymbol{u_1} \qquad\qquad\qquad & = & 75 \\
x_2 \qquad + \boldsymbol{u_2} \qquad\qquad & = & 300 \\
5x_1 + x_2 \qquad\qquad + \boldsymbol{u_3} \qquad & = & 540 \\
6x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{u_4} & = & 600 \\
x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 & \geq & 0
\end{array}}$$

Simplexschema:

BV	c_B	x_1 50	x_2 9	u_1 0	u_2 0	u_3 0	u_4 0	x_B	θ
u_1	0	1	0	1	0	0	0	75	$\boxed{75}$
u_2	0	0	1	0	1	0	0	300	—
u_3	0	5	1	0	0	1	0	540	108
u_4	0	6	1	0	0	0	1	600	100
		$\boxed{-50}$	-9	0	0	0	0	0	
x_1	50	1	0	1	0	0	0	75	—
u_2	0	0	1	0	1	0	0	300	300
u_3	0	0	1	-5	0	1	0	165	165
u_4	0	0	1	-6	0	0	1	150	$\boxed{150}$
		0	$\boxed{-9}$	50	0	0	0	3750	
x_1	50	1	0	1	0	0	0	75	75
u_2	0	0	0	6	1	0	-1	150	25
u_3	0	0	0	1	0	1	-1	15	$\boxed{15}$
x_2	9	0	1	-6	0	0	1	150	—
		0	0	$\boxed{-4}$	0	0	9	5100	
x_1	50	1	0	0	0	-1	1	60	
u_2	0	0	0	0	1	-6	5	60	
u_1	0	0	0	1	0	1	-1	15	
x_2	9	0	1	0	0	6	-5	240	
		0	0	0	0	4	5	5160	

Da alle Optimalitätsindikatoren $\Delta_j \geq 0$ und nur die für die Basisvariablen $=0$ sind, ist das eindeutige Maximum $z'^* = 5160$ erreicht bei $x_1^* = 60$, $x_2^* = 240$, $u_1^* = 15$, $u_2^* = 60$, $u_3^* = 0$, $u_4^* = 0$.

Der maximale Gewinn beträgt $z^* = 2z'^* = 10320$ €, für ihn sind 60 Kühe und 240 Schafe zu halten.

Bedeutung der errechneten Werte der Schlupfvariablen:
$u_1^* = 15$: 15 freie Kuhstallplätze, $x_1^* + u_1^* = 75$
$u_2^* = 60$: 60 freie Schafstallplättze, $x_2^* + u_2^* = 240$
$u_3^* = 0$: $5x_1^* + x_2^* + u_3^* = 5x_1^* + x_2^* = 540$: Weideland voll ausgeschöpft, Ungleich. mit = erfüllt
$u_4^* = 0$: $6x_1^* + x_2^* + u_4^* = 6x_1^* + x_2^* = 600$: Arbeitszeit voll ausgeschöpft, Ungleich. mit = erfüllt

II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z' = -\dfrac{z}{2} = -50x_1 - 9x_2 & + & 0 \longrightarrow \min \\ x_1 \quad + \boldsymbol{u_1} & = & 75 \\ x_2 \quad + \boldsymbol{u_2} & = & 300 \\ 5x_1 + x_2 \quad + \boldsymbol{u_3} & = & 540 \\ 6x_1 + x_2 \quad + \boldsymbol{u_4} & = & 600 \\ x_1, \ x_2, \ u_1, \ u_2, \ u_3, \ u_4 & \geq & 0 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem der Normalform enthält ein vollständiges System von Einheitsvektoren, deshalb kann die Simplexmethode direkt genutzt werden. Dafür werden die Gleichungen nach u_1, u_2, u_3 bzw. u_4 umgestellt:

$$\boxed{\begin{array}{rl} z' &= -50x_1 - 9x_2 + 0 \longrightarrow \min \\ u_1 &= -x_1 + 75 \\ u_2 &= -x_2 + 300 \\ u_3 &= -5x_1 - x_2 + 540 \\ u_4 &= -6x_1 - x_2 + 600 \\ & x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

S_0	NBV	x_1	x_2		
BV	c	-50	-9	0	θ
u_1	0	$\boxed{-1}$	0	75	$\boxed{75}$
u_2	0	0	-1	300	—
u_3	0	-5	-1	540	108
u_4	0	-6	-1	600	100
		$\boxed{-50}$	-9	0	

S_1	NBV	u_1	x_2		
BV	c	0	-9	0	θ
x_1	-50	-1	0	75	—
u_2	0	0	-1	300	300
u_3	0	5	-1	165	165
u_4	0	6	$\boxed{-1}$	150	$\boxed{150}$
		50	$\boxed{-9}$	-3750	

S_2	NBV	u_1	u_4		
BV	c	0	0	0	θ
x_1	-50	-1	0	75	75
u_2	0	-6	1	150	25
u_3	0	$\boxed{-1}$	1	15	15
x_2	-9	6	-1	150	—
		$\boxed{-4}$	9	-5100	

S_3	NBV	u_3	u_4		
BV	c	0	0	0	θ
x_1	-50	1	-1	60	
u_2	0	6	-5	60	
u_1	0	-1	1	15	
x_2	-9	-6	5	240	
		4	5	-5160	

Da alle Optimalitätsindikatoren $\Delta_j > 0$ sind, ist das eindeutige Minimum $z'^* = -5160$ erreicht bei $x_1^* = 60$, $x_2^* = 240$, $u_1^* = 15$, $u_2^* = 60$, $u_3^* = 0$, $u_4^* = 0$.

Der maximale Gewinn beträgt $z^* = -2z'^* = 10320$ €, für ihn sind 60 Kühe und 240 Schafe zu halten.

Bedeutung der errechneten Werte der Schlupfvariablen:
$u_1^* = 15$: 15 freie Kuhstallplätze, $x_1^* + u_1^* = 75$
$u_2^* = 60$: 60 freie Schafstallplättze, $x_2^* + u_2^* = 240$
$u_3^* = 0$: $5x_1^* + x_2^* + u_3^* = 5x_1^* + x_2^* = 540$: Weideland voll ausgeschöpft, Ungleich. mit = erfüllt
$u_4^* = 0$: $6x_1^* + x_2^* + u_4^* = 6x_1^* + x_2^* = 600$: Arbeitszeit voll ausgeschöpft, Ungleich. mit = erfüllt