## Aufgabe 8.49

Ein Betrieb stellt zwei Erzeugnisse $A$ und $B$ her, die pro Stück den gleichen Gewinn abwerfen. Arbeitszeit-, Energie- und Materialaufwand sind jedoch verschieden und sollen gewisse Fonds nicht überschreiten:

| in gewissen Einheiten | Erzeugnis $A$ | Erzeugnis $B$ | Fonds |
|---|---|---|---|
| Arbeitszeitaufwand je Stück | 1 | 2 | 170 |
| Energieaufwand je Stück | 2 | 1 | 100 |
| Materialaufwand je Stück | 4 | 1 | 160 |

a) Stellen Sie das mathematische Modell zur Maximierung des Gewinns auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe auf grafischem Wege!
c) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Zeichnen Sie die dabei durchlaufenen Basislösungen in die Skizze aus b) ein!
d) Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

## Lösung:

a) $x_1$ Anzahl herzustellende Erzeugnisse $A$, $x_2$ Anzahl herzustellende Erzeugnisse $B$

$$\begin{array}{lrcr}
\text{Gewinn:} & x_1 + x_2 & \longrightarrow & \max \\
\text{Arbeitszeit:} & x_1 + 2x_2 & \leq & 170 \\
\text{Energie:} & 2x_1 + x_2 & \leq & 100 \\
\text{Material:} & 4x_1 + x_2 & \leq & 160 \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Der absolute Gewinn $g$ pro Erzeugnis ist nicht gegeben, soll aber für beide Erzeugnisse gleich sein. Deshalb ist $G(x_1+x_2)g$ zu maximieren, hierfür reicht die Maximierung von $x_1+x_2$.

b)

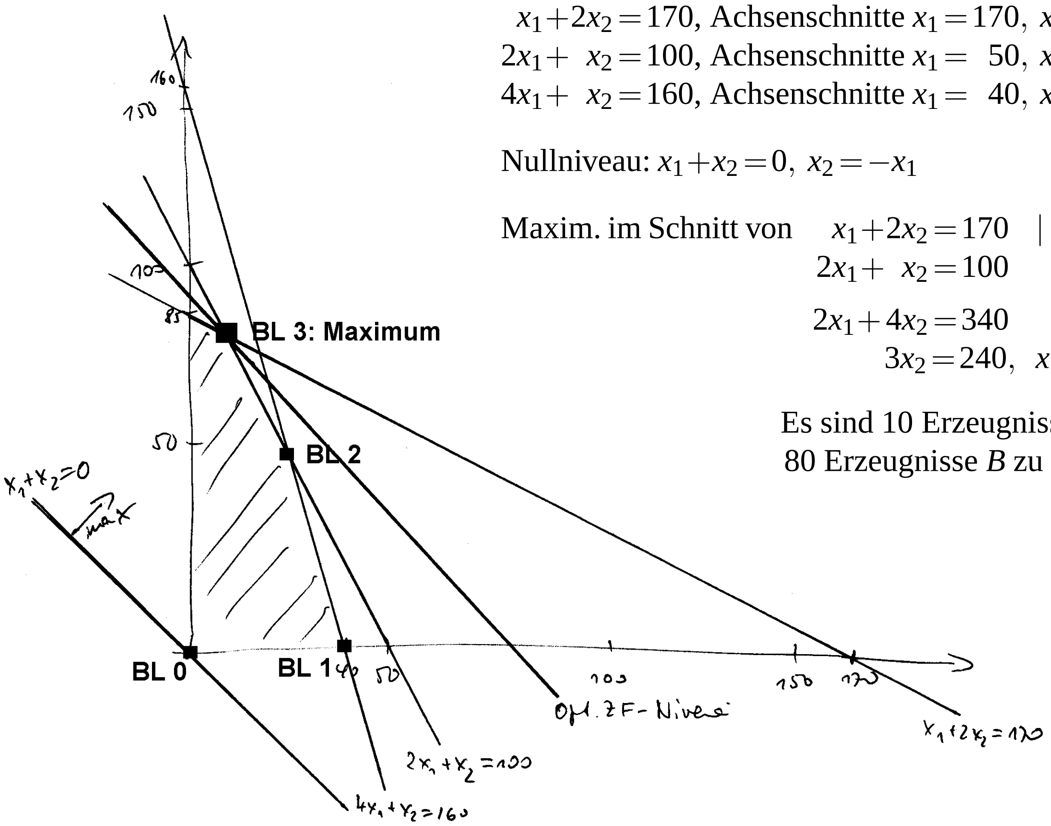
$x_1+2x_2=170$, Achsenschnitte $x_1=170$, $x_2=85$
$2x_1+x_2=100$, Achsenschnitte $x_1=50$, $x_2=100$
$4x_1+x_2=160$, Achsenschnitte $x_1=40$, $x_2=160$

Nullniveau: $x_1+x_2=0$, $x_2=-x_1$

Maxim. im Schnitt von

$$\begin{array}{rcll}
x_1+2x_2 &=& 170 & \mid \cdot 2 \\
2x_1+x_2 &=& 100 & \mid - \\
2x_1+4x_2 &=& 340 & \mid + \\
3x_2 &=& 240, & x_1=100
\end{array}$$

Es sind 10 Erzeugnisse $A$ und 80 Erzeugnisse $B$ zu fertigen.



c) Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z = x_1 + x_2 & \longrightarrow & \max \\ x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{u_1} & = & 170 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + \boldsymbol{u_2} & = & 100 \\ 4x_1 + x_2 \qquad\qquad + \boldsymbol{u_3} & = & 160 \\ x_1, \quad x_2, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

**Version Gaußalgorithmus**
(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

| BV | $c_B$ | $x_1$ 1 | $x_2$ 1 | $u_1$ 0 | $u_2$ 0 | $u_3$ 0 | $x_B$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 0 | 1 | 2 | **1** | **0** | **0** | 170 | 170 |
| $u_2$ | 0 | 2 | 1 | **0** | **1** | **0** | 100 | 50 |
| $u_3$ | 0 | 4 | 1 | **0** | **0** | **1** | 160 | $\boxed{40}$ |
| | | $\boxed{-1}$ | 1 | **0** | **0** | **0** | 0 | |
| $u_1$ | 0 | **0** | $\frac{7}{4}$ | **1** | **0** | $-\frac{1}{4}$ | 130 | $\frac{520}{7}$ |
| $u_2$ | 0 | **0** | $\frac{1}{2}$ | **0** | **1** | $-\frac{1}{2}$ | 20 | $\boxed{20}$ |
| $x_1$ | 1 | **1** | $\frac{1}{4}$ | **0** | **0** | $\frac{1}{4}$ | 40 | 160 |
| | | **0** | $\boxed{-\frac{3}{4}}$ | **0** | **0** | $\frac{1}{4}$ | 40 | |
| $u_1$ | 0 | **0** | **0** | **1** | $-\frac{7}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 60 | $\boxed{40}$ |
| $x_2$ | 1 | **0** | **1** | **0** | 2 | $-1$ | 40 | — |
| $x_1$ | 1 | **1** | **0** | **0** | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 30 | 60 |
| | | **0** | **0** | **0** | $\frac{3}{2}$ | $\boxed{-\frac{1}{2}}$ | 70 | |
| $u_3$ | 0 | **0** | **0** | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{7}{3}$ | **1** | 40 | |
| $x_2$ | 1 | **0** | **1** | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | **0** | 80 | |
| $x_1$ | 1 | **1** | **0** | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | **0** | 10 | |
| | | **0** | **0** | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | **0** | 90 | |

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ, für die Nichtbasisvariablen positiv. Damit liegt ein eindeutiges Optimum vor.

Es wurden folgende Basislösungen $(x_1, x_2)$ durchlaufen: $(0,0)$, $(40,0)$, $(30,40)$, $(10,80)$.

Das Maximum wird für $x_1^* = 10$, $x_2^* = 80$ mit $z^* = 90$ angenommen. Also sind für maximalen Gewinn 10 Erzeugnisse $A$ und 80 Erzeugnisse $B$ herzustellen.

d) In der optimalen Lösung sind die Schlupfvariablen $u_1$ und $u_2$ als Nichtbasisvariablen jeweils gleich 0, das bedeutet, dass Arbeitszeit und Energie vollständig verbraucht werden. Hingegen ist $u_3^* = 40$, so dass 40 Einheiten Material übrig bleiben.