Aufgabe 8.46

In einem Betrieb werden aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 mit gleichem Aufwand Erzeugnisse E_1 und E_2 gefertigt, wobei pro Erzeugnis E_1 2 Geldeinheiten und pro Erzeugnis E_2 1 Geldeinheit Gewinn erwirtschaftet werden.

Für ein Erzeugnis E_1 werden 1 Einheit R_1, 2 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 benötigt, während pro Erzeugnis E_2 3 Einheiten R_1, 3 Einheiten R_2 und 1 Einheit R_3 benötigt werden.

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn 18 Einheiten R_1, 21 Einheiten R_2 und 21 Einheiten R_3 zur Verfügung stehen, und lösen Sie diese Optimierungsaufgabe!

Lösung:

Sei x_1 : Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_1,
x_2 : Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_2.

Dann lautet das Modell:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Gewinn:} & 2x_1 & + & x_2 & \to & \max \\
\text{Rohstoff } R_1: & x_1 & + & 3x_2 & \le & 18 \\
\text{Rohstoff } R_2: & 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 21 \\
\text{Rohstoff } R_3: & 3x_1 & + & x_2 & \le & 21 \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1, & & x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Durch die Einführung von Schlupfvariablen für die drei Ungleichungen erhält man als Normalform:

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
2x_1 & + x_2 & & & & \to & \max \\
x_1 & +3x_2 & +\boldsymbol{u_1} & & & = & 18 \\
2x_1 & +3x_2 & & +\boldsymbol{u_2} & & = & 21 \\
3x_1 & - x_2 & & & +\boldsymbol{u_3} & = & 21 \\
x_1, & x_2, & u_1, & u_2, & u_3 & \ge & 0
\end{array}
$$

Simplexschema:

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	2	1	0	0	0	x_B	θ
u_1	0	1	3	**1**	**0**	**0**	18	18
u_2	0	2	3	**0**	**1**	**0**	21	$\frac{21}{2}$
u_3	0	3	1	**0**	**0**	**1**	21	$\boxed{7}$
		$\boxed{-2}$	-1	**0**	**0**	**0**	0	
u_1	0	**0**	$\frac{8}{3}$	**1**	**0**	$-\frac{1}{3}$	11	$\frac{33}{8}$
u_2	0	**0**	$\frac{7}{3}$	**0**	**1**	$-\frac{2}{3}$	7	$\boxed{3}$
x_1	2	**1**	$\frac{1}{3}$	**0**	**0**	$\frac{1}{3}$	7	21
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	**0**	**0**	$\frac{2}{3}$	14	
u_1	0	**0**	**0**	**1**	$\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	3	
x_2	1	**0**	**1**	**0**	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	3	
x_1	2	**1**	**0**	**0**	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	6	
		0	**0**	**0**	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	15	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, handelt es sich um das Optimum:
$x_1^* = 6,\ x_2^* = 3$, optimaler Zielfunktionswert: $z^* = 15$.

oder: grafische Lösung:

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die Punkte $(0,0)$, $(0,6)$, $(3,5)$, $(6,3)$ und $(7,0)$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $2x_1 + x_2 = 2$ führt auf die optimale Lösung $x_1^* = 6$, $x_2^* = 3 \implies z^* = 15$.