Aufgabe 8.45

In einer Werkstatt werden kleine und große Regale gefertigt. Zur Herstellung eines kleinen Regals wird 1 Stunde benötigt, dabei entstehen Kosten in Höhe von 50 € und beim Verkauf ist ein Gewinn von 20 € zu erzielen. Ein großes Regal wird in 4 Stunden hergestellt, die Herstellungskosten betragen 300 € und der zu erzielende Verkaufsgewinn 130 €. Es stehen maximal 100 Stunden zur Verfügung, die Herstellungskosten sollen insgesamt 6000 € nicht überschreiten.

a) Stellen Sie das mathematische Modell für die Gewinnmaximierung unter diesen Bedingungen auf!
b) Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe mittels Simplexverfahren! Wie groß ist der maximale Gewinn?
c) Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Lösung:

a) x_1 Anzahl herzustellende kleine Regale, x_2 Anzahl herzustellende große Regale

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Gewinn:} & 20x_1+130x_2 & \longrightarrow & \max \\
\text{Zeit:} & x_1+4x_2 & \leq & 100 \\
\text{Herstellungskosten:} & 50x_1+300x_2 & \leq & 6000 \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1,\quad x_2 & \geq & 0, \quad \text{außerdem Ganzzahligkeit}
\end{array}$$

b) **Version Gaußalgorithmus**
(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Das Modell lässt sich durch Division der Gewinnfunktion durch 10 und der Ungleichung für die Kosten durch 50 vereinfachen zu

$$\begin{array}{rcrcl}
z'=z/10 & = & 2x_1+13x_2 & \longrightarrow & \max \\
 & & x_1+4x_2 & \leq & 100 \\
 & & x_1+6x_2 & \leq & 120 \\
 & & x_1,\quad x_2 & \geq & 0\quad,
\end{array}$$

die Normalform lautet

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
z' & = & 2x_1+13x_2 \qquad\qquad \longrightarrow \max \\
 & & x_1+4x_2+\boldsymbol{u_1} \qquad = 100 \\
 & & x_1+6x_2 \qquad +\boldsymbol{u_2} = 120 \\
 & & x_1,\quad x_2,\quad u_1,\quad u_2 \geq 0\;.
\end{array}}$$

Simplexschema:

		x_1	x_2	u_1	u_2		
BV	c_B	2	13	0	0	x_B	θ
u_1	0	1	4	**1**	**0**	100	25
u_2	0	1	6	**0**	**1**	120	$\boxed{20}$
		-2	$\boxed{-13}$	**0**	**0**	0	
u_1	0	$\frac{1}{3}$	**0**	**1**	$-\frac{2}{3}$	20	
x_2	13	$\frac{1}{6}$	**1**	**0**	$\frac{1}{6}$	20	
		$\frac{1}{6}$	**0**	**0**	$\frac{13}{6}$	260	

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ, für die Nichtbasisvariablen positiv. Damit liegt das eindeutige Optimum bei $x_1^*=0$, $x_2^*=20$, $u_1^*=20$, $u_2^*=0$, $z'^*=260$, $z^*=10z'^*=2600$. Der maximal mögliche Gewinn liegt bei 2600 €, er wird erzielt, wenn kein kleines und 20 große Regale gefertigt werden.

Ohne die zahlenmäßige Vereinfachung des Modells lautet das Simplexschema:

BV	c_B	x_1 20	x_2 130	u_1 0	u_2 0	x_B	θ
u_1	0	1	4	**1**	**0**	100	25
u_2	0	50	300	**0**	**1**	6000	$\boxed{20}$
		-20	$\boxed{-130}$	**0**	**0**	0	
u_1	0	$\frac{1}{3}$	**0**	**1**	$-\frac{1}{75}$	20	
x_2	130	$\frac{1}{6}$	**1**	**0**	$\frac{1}{300}$	20	
		$\frac{5}{3}$	**0**	**0**	$\frac{13}{30}$	2600	

c) $u_1^* = 20$ in der optimalen Lösung bedeutet, dass 20 der maximal möglichen 100 Stunden nicht benötigt werden, $u_2^* = 0$, dass das Herstellungskostenlimit von 6000 € komplett ausgeschöpft wird.