Aufgabe 8.37

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 &\le 15 \\ -5x_2 + 3x_3 &\le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Lösung:

Version Gaußalgorithmus
(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Durch die Einführung von Schlupfvariablen für die beiden Ungleichungen erhält man als Normalform:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad &\to \max \\ \mathbf{x_1} + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 + \mathbf{u_2} \qquad &= 15 \\ -5x_2 + 3x_3 \qquad + \mathbf{u_3} &= 12 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ u_2,\ u_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Simplexschema:

BV	c_B	x_1 3	x_2 3	x_3 -1	u_2 0	u_3 0	x_B	θ
x_1	3	**1**	2	-1	**0**	**0**	3	–
u_2	0	**0**	-1	2	**1**	**0**	15	$\frac{15}{2}$
u_3	0	**0**	-5	3	**0**	**1**	12	$\boxed{4}$
		0	3	$\boxed{-2}$	**0**	**0**	9	
x_1	3	**1**	$\frac{1}{3}$	**0**	**0**	$\frac{1}{3}$	7	21
u_2	0	**0**	$\frac{7}{3}$	**0**	**1**	$-\frac{2}{3}$	7	$\boxed{3}$
x_3	-1	**0**	$-\frac{5}{3}$	**1**	**0**	$\frac{1}{3}$	4	–
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	**0**	**0**	$\frac{2}{3}$	17	
x_1	3	**1**	**0**	**0**	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	6	
x_2	3	**0**	**1**	**0**	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	3	
x_3	-1	**0**	**0**	**1**	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	9	
		0	**0**	**0**	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	18	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, handelt es sich um das Optimum: $x_1^* = 6$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 9$, optimaler Zielfunktionswert: $z^* = 18$. Da die Optimalitätsindikatoren für die Nichtbasisvariablen positiv sind, ist das Optimum eindeutig.

oder: Elimination von x_1 durch $x_1 = 3 - 2x_2 + x_3$ führt zu der grafisch lösbaren Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} -3x_2 + 2x_3 + 9 &\to \max \\ -x_2 + 2x_3 &\le 15 \\ -5x_2 + 3x_3 &\le 12 \\ x_2,\ x_3 &\ge 0\ . \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die positive x_2-Achse, durch die Punkte $(0,0)$, $(0,4)$ und $(3,9)$ sowie von dem letzten Punkt aus durch die Gerade $-x_2 + 2x_3 = 15$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $-3x_2 + 2x_3 = 6$ führt auf die optimale Lösung $x_2^* = 3$, $x_3^* = 9 \implies x_1^* = 6$, $z^* = 18$.

oder: Elimination von x_3 durch $x_3 = x_1 + 2x_2 - 3$ führt zu der grafisch lösbaren Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 + 3 & \to & \max \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 21 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 21 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(vgl. Aufgabe 8.46).

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die Punkte $(0,0)$, $(0,7)$, $(6,3)$ und $(7,0)$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $2x_1 + x_2 = 2$ führt auf die optimale Lösung $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3 \implies x_3^* = 9,\ z^* = 18$.