Aufgabe 8.35

Bestimmen Sie mit der Simplexmethode die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert der Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{l} -x_1-2x_2+2x_3+x_4 \longrightarrow \max \\ -3x_1+3x_2-x_3-3x_4 \geq -7 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 3 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \qquad ! \end{array}$$

Lösung:

I. Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Substitution: $x_1' = x_1 - 1,\ \ x_1 = x_1' + 1$

$$\begin{array}{rcl} z = -(x_1'+1)-2x_2+2x_3+x_4 & \longrightarrow & \max \\ -3(x_1'+1)+3x_2-x_3-3x_4-u_1 & = & -7 \\ (x_1'+1)+x_2+x_3+x_4+u_2 & = & 3 \\ -(x_1'+1)+x_2-x_3+x_4+u_3 & = & 4 \\ x_1',\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ u_1,\ u_2,\ u_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z' = z+1 = -x_1'-2x_2+2x_3+x_4 & \longrightarrow & \max \\ 3x_1'-3x_2+x_3+3x_4+u_1 & = & 4 \\ x_1'+x_2+x_3+x_4+u_2 & = & 2 \\ -x_1'+x_2-x_3+x_4+u_3 & = & 5 \\ x_1',\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ u_1,\ u_2,\ u_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

		x_1'	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	-1	-2	2	1	0	0	0	x_B	θ
u_1	0	3	-3	1	3	1	0	0	4	4
u_2	0	1	1	1	1	0	1	0	2	$\boxed{2}$
u_3	0	-1	1	-1	1	0	0	1	5	—
		1	2	$\boxed{-2}$	-1	0	0	0	0	
u_1	0	2	-4	0	2	1	-1	0	2	
x_3	2	1	1	1	1	0	1	0	2	
u_3	0	0	2	0	2	0	1	1	7	
		3	4	0	1	0	2	0	4	

Da die Optimalitätsindikatoren für alle Nichtbasisvariablen >0 sind, liegt das eindeutige Optimum $z'=4$ bei $x_1'=0,\ x_2=0,\ x_3=2,\ x_4=0$ vor. Für die Ausgangsaufgabe ergibt sich damit als optimale Lösung $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=2,\ x_4=0$ und als maximaler Zielfunktionswert 3.

II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Substitution: $x_1' = x_1 - 1,\ \ x_1 = x_1' + 1$

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
z' = -z = & (x_1'+1) & +2x_2 & -2x_3 & -\ x_4 & & & \longrightarrow & \min \\
& -3(x_1'+1) & +3x_2 & -\ x_3 & -3x_4 & -u_1 & & = & -7 \\
& (x_1'+1) & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & +u_2 & & = & 3 \\
& -(x_1'+1) & +\ x_2 & -\ x_3 & +\ x_4 & & +u_3 & = & 4 \\
& x_1', & x_2, & x_3, & x_4, & u_1,\ u_2, & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Normalform:
$$
\boxed{
\begin{array}{rrrrrrrl}
z' = & x_1' & +2x_2 & -2x_3 & -\ x_4 & & & +\ 1 \longrightarrow \min \\
& 3x_1' & -3x_2 & +\ x_3 & +3x_4 & +u_1 & & = 4 \\
& x_1' & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & +u_2 & & = 2 \\
& -x_1' & +\ x_2 & -\ x_3 & +\ x_4 & & +u_3 & = 5 \\
& x_1', & x_2, & x_3, & x_4, & u_1,\ u_2, & u_3 & \geq 0
\end{array}
}
$$
bzw.

$$
\boxed{
\begin{array}{rrrrrlcl}
z' = & x_1' & +2x_2 & -2x_3 & -\ x_4 & +\ 1 & \longrightarrow & \min \\
u_1 = & -3x_1' & +3x_2 & -\ x_3 & -3x_4 & +\ 4 & & \\
u_2 = & -\ x_1' & -\ x_2 & -\ x_3 & -\ x_4 & +\ 2 & & \\
u_3 = & x_1' & -\ x_2 & +\ x_3 & -\ x_4 & +\ 5 & & \\
& \multicolumn{4}{l}{x_1', x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3} & & \geq & 0
\end{array}
}
$$

S_0	NBV	x_1'	x_2	x_3	x_4		
BV	c	1	2	−2	−1	1	θ
u_1	0	−3	3	−1	−3	4	4
u_2	0	−1	−1	$\boxed{-1}$	−1	2	$\boxed{2}$
u_3	0	1	−1	1	−1	5	—
		1	2	$\boxed{-2}$	−1	1	

S_1	NBV	x_1'	x_2	u_2	x_4		
BV	c	1	2	0	−1	1	θ
u_1	0	−2	4	1	−2	2	
x_3	−2	−1	−1	−1	−1	2	
u_3	0	0	−2	−1	−2	7	
		3	4	2	1	−3	

Im Tableau S_1 sind alle Optimalitätsindikatoren >0, also liegt das eindeutige Optimum $z' = -3$ bei $x_1' = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0$ vor. Für die Ausgangsaufgabe ergibt sich damit als optimale Lösung $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0$ und als maximaler Zielfunktionswert 3.