Aufgabe 8.33

Lösen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrrrrcr}
-3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +\ x_4 & -\ x_5 & \to & \min \\
2x_1 & -\ x_2 & +\ x_3 & & & = & 6 \\
x_1 & -4x_2 & & +\ x_4 & & = & 8 \\
2x_1 & -2x_2 & & & +\ x_5 & = & 12 \\
x_1, & & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \\
 & x_2 & & & & \leq & 0\ !
\end{array}$$

Lösung:

Version Gaußalgorithmus
(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Zur Überführung in Normalform sind die Substitutionen $x_2 = -x_2'$ und $z = -z'$ erforderlich.

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrrcr}
3x_1 & +2x_2' & +2x_3 & -\ x_4 & +\ x_5 & \to & \min \\
2x_1 & +\ x_2' & +\ \mathbf{x_3} & & & = & 6 \\
x_1 & +4x_2' & & +\ \mathbf{x_4} & & = & 8 \\
2x_1 & +2x_2' & & & +\ \mathbf{x_5} & = & 12 \\
x_1, & x_2' & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}}$$

Simplexmethode:

BV	c_B	x_1 3	x_2' 2	x_3 2	x_4 -1	x_5 1	x_B	θ	
x_3	2	2	1	**1**	**0**	**0**	6	6	
x_4	-1	1	4	**0**	**1**	**0**	8	$\boxed{2}$	x_4 aus Basis ausschließen
x_5	1	2	2	**0**	**0**	**1**	12	6	
		2	$\boxed{-2}$	**0**	**0**	**0**	16		x_2' in Basis aufnehmen
x_3	2	$\frac{7}{4}$	**0**	**1**	$-\frac{1}{4}$	**0**	4		
x_2'	2	$\frac{1}{4}$	**1**	**0**	$\frac{1}{4}$	**0**	2		alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Maximum für
x_5	1	$\frac{3}{2}$	**0**	**0**	$-\frac{1}{2}$	**1**	8		$x_1^* = 0,\ x_2'^* = 2,\ x_3^* = 4,\ x_4^* = 0,$
		$\frac{5}{2}$	**0**	**0**	$\frac{1}{2}$	**0**	20		$x_5^* = 8,$ opt. ZF-Wert $z'^* = 20$

Da die Optimalitätsindikatoren für die Nichtbasisvariablen x_2, x_3 und x_5 positiv sind, ist das Optimum eindeutig. Nach Rücktransformation ergibt sich als optimale Lösung der Ausgangsaufgabe $x_1^* = 0,\ x_2^* = -x_2'^* = -2,\ x_3^* = 4,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 8,\ \ z^* = -z'^* = -20.$