Aufgabe 8.31

Wenden Sie auf die Optimierungsaufgaben

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2 & \longrightarrow & \max \\ -x_1+\ x_2 & \leq & 1 \\ x_1-\ x_2 & \leq & 1 \\ x_1,\quad x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2 & \longrightarrow & \max \\ -x_1+\ x_2 & \geq & 1 \\ x_1-\ x_2 & \geq & 1 \\ x_1,\quad x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

die Simplexmethode an und veranschaulichen Sie die Situation auf grafischem Wege!

Lösung:

Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

a) Zur Aufstellung der Normalform sind in beiden Ungleichungen Schlupfvariable einzuführen: $-x_1+x_2+x_3=1$, $x_1-x_2+x_4=1$, außerdem muss die Zielfunktion mit -1 durchmultipliziert werden:

Normalform: $$\boxed{\begin{array}{rrrrcl} -2x_1 & -3x_2 & & & +0 & \longrightarrow \min \\ -x_1+ & x_2 & +\mathbf{x_3} & & = & 1 \\ x_1- & x_2 & & +\mathbf{x_4} & = & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}}$$

Jede Gleichung enthält eine Variable, die nur in dieser Gleichung vorkommt und dort einen positiven Koeffizienten hat. Deshalb kann sofort das Simplextableau S_0 aufgestellt werden:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} z' & = & -2x_1-3x_2+0 \quad \longrightarrow \min \\ x_3 & = & \quad x_1-\ x_2+1 \\ x_4 & = & -x_1+\ x_2+1 \\ & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \quad \geq \ 0 \end{array}}$$

S_0 BV	NBV c	x_1 -2	x_2 -3	0	θ
x_3	0	1	$\boxed{-1}$	1	$\boxed{1}$
x_4	0	-1	1	1	—
		-2	$\boxed{-3}$	0	

S_1 BV	NBV c	x_1 -2	x_3 0	0	θ
x_2	-3	1	-1	1	—
x_4	0	0	-1	2	—
		$\boxed{-5}$	3	-3	

alle b_{i1} nichtnegativ $\Longrightarrow$
ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

b) Bei Einführung der Schlupfvariablen ergibt sich jetzt $-x_1+x_2-x_3=1$, $x_1-x_2-x_4=1$ und damit die Normalform: $$\boxed{\begin{array}{rrrrcl} -2x_1 & -3x_2 & & & +0 & \longrightarrow \min \\ -x_1+ & x_2 & -x_3 & & = & 1 \\ x_1- & x_2 & & -x_4 & = & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}}$$

Da die Gleichungen keine Variablen enthalten, die nur in der jeweiligen Gleichung vorkommen und dort einen positiven Koeffizienten haben, wird für die Suche nach einer zulässigen Basislösung zu einem Hilfsproblem übergegangen:

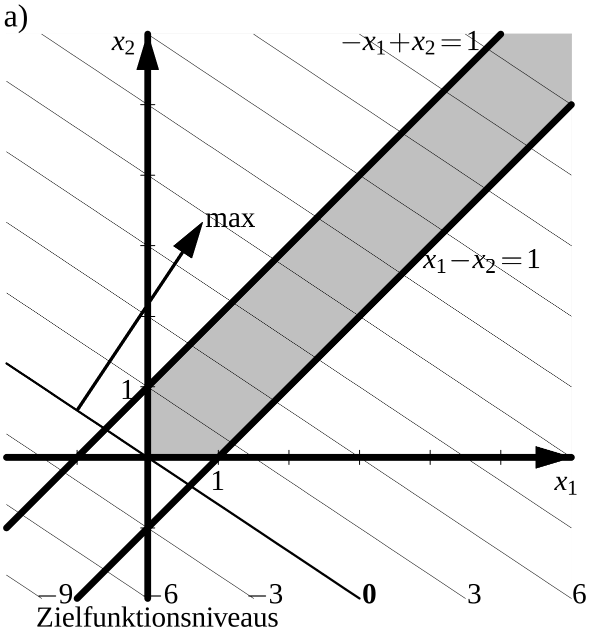
$$\boxed{\begin{array}{rrrrrrcl} & & & & v_1 & +v_2 & +0 & \longrightarrow \min \\ -x_1+ & x_2 & -x_3 & & +\mathbf{v_1} & & = & 1 \\ x_1- & x_2 & & -x_4 & & +\mathbf{v_2} & = & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & v_1, & v_2 & \geq & 0 \end{array}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} h & = & v_1+v_2 \qquad\qquad +0 \longrightarrow \min \\ v_1 & = & \quad x_1-\ x_2+x_3 \qquad +1 \\ v_2 & = & -x_1+\ x_2 \qquad +x_4+1 \\ & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ v_1,\ v_2 \ \geq \ 0 \end{array}}$$

H_0	NBV	x_1	x_2	x_3	x_4		
BV	c	0	0	0	0	0	θ
v_1	1	1	-1	1	0	1	
v_2	1	-1	1	0	1	1	
		0	0	1	1	2	

alle $d\Delta_j \geq 0$
$\Longrightarrow$ Minimum der Ersatzaufgabe $h = 2 > 0$
$\Longrightarrow$ zulässiger Bereich des Ausgangssystems leer, d.h. Ausgangsaufgabe unlösbar

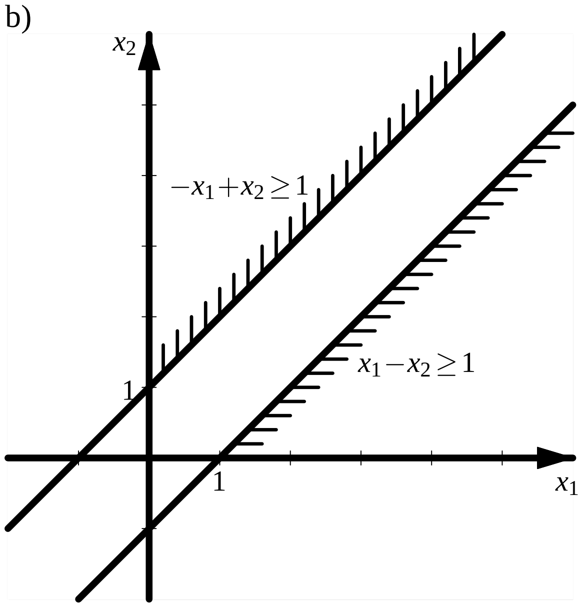
Grafische Veranschaulichung

a)



ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

b)



zulässiger Bereich leer, LOA unlösbar