Aufgabe 8.30

Überführen Sie die Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \to & \max \\ x_1 + x_2 & \geq & 12 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 20 \\ x_1 \geq 3, & & x_2 \leq 0 \end{array}$$
in Normalform, bestimmen Sie mit Hilfe eines Hilfsproblems eine zulässige Basislösung und lösen Sie davon ausgehend die Ausgangsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Hätte das auf diesem Wege erhaltene Ergebnis auch einfacher ermittelt werden können?

Lösung:

Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \to & \max \\ x_1 + x_2 & \geq & 12 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 20 \\ x_1 \geq 3, & & x_2 \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x_1' = x_1 - 3, & x_1 = x_1' + 3 \\ x_2' = -x_2, & x_2 = -x_2' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x_1' + 9 - 2x_2' & \to & \max \\ x_1' + 3 - x_2' & \geq & 12 \\ 2x_1' + 6 - x_2' & \geq & 20 \\ x_1' \geq 0, & & x_2' \geq 0 \end{array}$$

Statt $3x_1' - 2x_2' + 9$ kann auch $3x_1' - 2x_2'$ maximiert werden. Die Normalform lautet somit nach Einführung der Schlupfvariablen u_1 und u_2
$$\boxed{\begin{array}{rcl} 3x_1' - 2x_2' & \to & \max \\ x_1' - x_2' - u_1 & \geq & 9 \\ 2x_1' - x_2' - u_2 & \geq & 14 \\ x_1', \; x_2', \; u_1, \; u_2 & \geq & 0 \; . \end{array}}$$

Eine zulässige Basislösung ist nicht direkt ablesbar, deshalb werden die künstlichen Variablen v_1 und v_2 eingeführt, für die folgendes Hilfsproblem lösen ist:
$$\boxed{\begin{array}{rcl} -v_1 - v_2 & \to & \max \\ x_1' - x_2' - u_1 + \mathbf{v_1} & \geq & 9 \\ 2x_1' - x_2' - u_2 + \mathbf{v_2} & \geq & 14 \\ x_1', \; x_2', \; u_1, \; u_2, \; v_1, \; v_2 & \geq & 0 \; . \end{array}}$$

1. Phase des Simplexalgorithmus:

		x_1'	x_2'	u_1	u_2	v_1	v_2		
BV	c_B	0	0	0	0	−1	−1	x_B	θ
v_1	−1	1	−1	−1	0	**1**	**0**	9	9
v_2	−1	2	−1	0	−1	**0**	**1**	14	$\boxed{7}$
		$\boxed{-3}$	2	1	1	**0**	**0**	−23	
v_1	−1	**0**	$-\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$	**1**	$-\frac{1}{2}$	2	$\boxed{4}$
x_1'	0	**1**	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	7	–
		0	$\frac{1}{2}$	1	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	**0**	$\frac{3}{2}$	−2	
u_2	0	**0**	−1	−2	**1**	2	−1	4	
x_1'	0	**1**	−1	−1	**0**	1	0	9	
		0	0	0	**0**	1	1	0	

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ, maximaler Zielfunktionswert der Ersatzaufgabe ist 0. Also ist $x_1' = 9, \; x_2' = 0, \; u_1 = 0, \; u_2 = 4$ eine zulässige Basislösung der Normalform.

2. Phase des Simplexalgorithmus:

		x_1'	x_2'	u_1	u_2		
BV	c_B	3	-2	0	0	x_B	θ
u_2	0	**0**	-1	-2	**1**	4	–
x_1'	3	**1**	-1	-1	**0**	9	–
		0	-1	$\boxed{-3}$	**0**	27	

Da in der Spalte mit negativem Optimalitätsindikator -3 alle Koeffizienten des Gleichungssystems nichtpositiv sind, ist die Zielfunktion unbeschränkt und die Optimierungsaufgabe unlösbar.

Die Unbeschränktheit der Zielfunktion ist sofort zu sehen, wenn man sich z.B. überlegt, dass alle Punkte der x_1–Achse mit $x_1 \geq 12$ zulässig sind. Für $x_1 \to \infty, x_2 = 0$ gilt $z = 3x_1 + 2x_2 \to \infty$, so dass die Zielfunktion über alle Grenzen wächst.