Aufgabe 8.24

Lösen Sie mit dem Simplexalgorithmus die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6 &\longrightarrow \min \\ -2x_1 + 6x_2 &\leq 13 \\ -x_1 + 12x_2 &\leq 29 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

I. Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Normalform:
$$\boxed{\begin{array}{rcl} z' = -z+6 = -2x_1 + 3x_2 & \longrightarrow & \max \\ -2x_1 + 6x_2 + \mathbf{u_1} & = & 13 \\ -x_1 + 12x_2 \quad + \mathbf{u_2} & = & 29 \\ x_1, \quad x_2, \quad u_1, \quad u_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

BV	c_B	x_1 -2	x_2 3	u_1 0	u_2 0	x_B	θ
u_1	0	-2	6	**1**	**0**	13	$\boxed{\frac{13}{6}} = \frac{26}{12}$
u_2	0	-1	12	**0**	**1**	29	$\frac{29}{12}$
		2	$\boxed{-3}$	0	0	0	
x_2	3	$-\frac{1}{3}$	**1**	$\frac{1}{6}$	**0**	$\frac{13}{6}$	
u_2	0	3	**0**	-2	**1**	3	
		1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{13}{2}$	

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ, für die Nichtbasisvariablen positiv. Also hat die Optimierungsaufgabe bei $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{13}{6}$ das eindeutige Minimum $z^* = -z'^* + 6 = -\dfrac{1}{2}$. (Die Werte der Schlupfvariablen betragen dort $u_1 = 0,\ u_2 = 3$.)

II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Normalform:
$$\boxed{\begin{array}{rl} z = 2x_1 - 3x_2 \quad + 6 & \longrightarrow \min \\ -2x_1 + 6x_2 + \mathbf{u_1} & = 13 \\ -x_1 + 12x_2 \quad + \mathbf{u_2} & = 29 \\ x_1, \quad x_2, \quad u_1, \quad u_2 & \geq 0 \end{array}}$$
bzw.
$$\boxed{\begin{array}{rl} z = 2x_1 - 3x_2 + 6 & \longrightarrow \min \\ u_1 = 2x_1 - 6x_2 + 13 & \\ u_2 = x_1 - 12x_2 + 29 & \\ x_1, x_2, u_1, u_2 & \geq 0 \end{array}}$$

S_0 BV	NBV c	x_1 2	x_2 -3	6	θ
u_1	0	2	$\boxed{-6}$	13	$\boxed{\frac{13}{6}} = \frac{26}{12}$
u_2	0	1	-12	29	$\frac{29}{12}$
		2	$\boxed{-3}$	6	

S_1 BV	NBV c	x_1 2	u_1 0	6	θ
x_2	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{13}{6}$	
u_2	0	-3	2	3	
		1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

Im Schema S_1 sind alle Optimalitätsindikatoren größer als 0. Also hat die Optimierungsaufgabe bei $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{13}{6}$ das eindeutige Minimum $z^* = -\dfrac{1}{2}$. (Die Werte der Schlupfvariablen betragen dort $u_1 = 0,\ u_2 = 3$.)