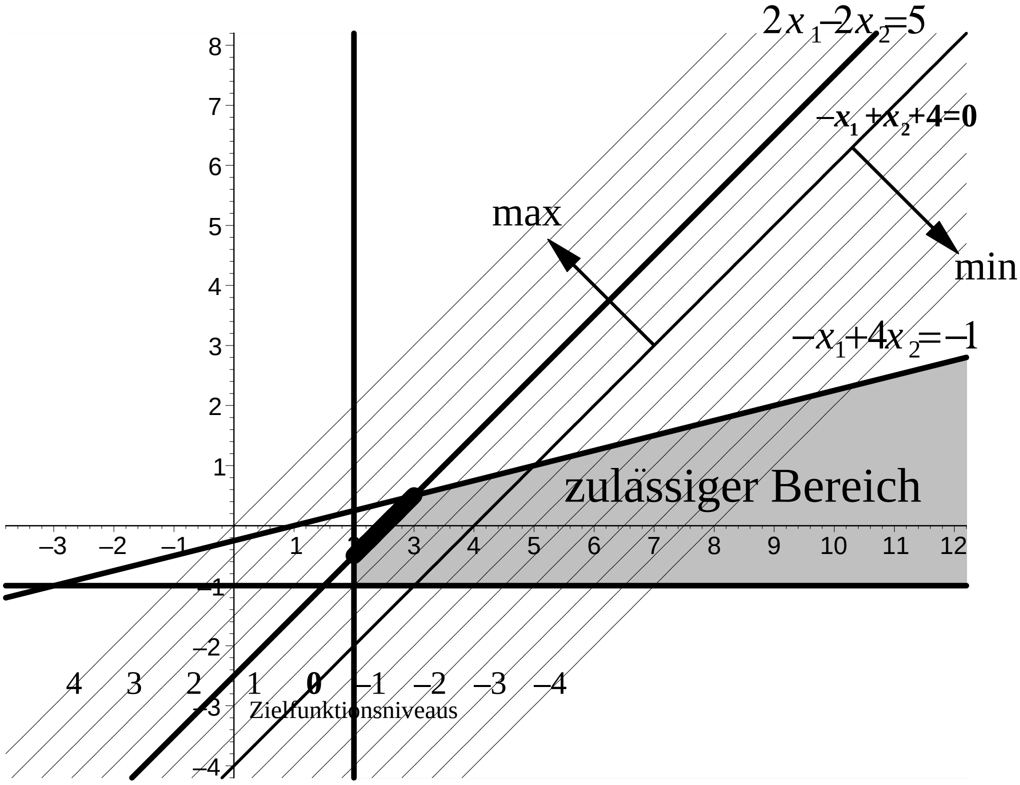
Aufgabe 8.19

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $z(x_1,x_2)=-x_1+x_2+4$ für solche x_1 und x_2, die die Bedingungen $2x_1-2x_2\geq 5$, $-x_1+4x_2\leq -1$, $x_1\geq 2$ und $x_2\geq -1$ erfüllen, jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die bei dem Simplexalgorithmus durchlaufenen Basislösungen in die Skizze der grafischen Lösung ein. Für welche Argumente werden die Optima erreicht?

Lösung:

Grafische Lösung



Maximierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach links oben. Der zulässige Bereich wird verlassen auf dem Abschnitt der Gerade $-x_1+x_2+4=1.5$ für $2\leq x_1\leq 3$, das Zielfunktionsniveau ist dort 1.5.

Also beträgt das Maximum $\frac{3}{2}$ und wird für alle Punkte auf dem Geradenstück

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ 0\leq t\leq 1$$ angenommen.

Minimierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach rechts unten. Das ist beliebig weit möglich, die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach unten unbeschränkt und die Aufgabe damit nicht lösbar.

Simplexverfahren: I. Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Variable: $x_1'=x_1-2\geq 0,\ x_2'=x_2+1\geq 0$, d.h. $x_1=x_1'+2,\ x_2=x_2'-1$,

Zielfunktion: $z=-(x_1'+2)+(x_2'-1)+4=-x_1'+x_2'+1$, d.h. $z'=-x_1'+x_2'$, $z=z'+1$

NB1: $2(x_1'+2)-2(x_2'-1)-u_1=5 \implies 2x_1'-2x_2'-u_1=-1 \implies -2x_1'+2x_2'+u_1=1$

NB2: $-(x_1'+2)+4(x_2'-1)+u_2=-1 \implies -x_1'+4x_2'+u_2=5$

Maximierung der Zielfunktion: Normalform:

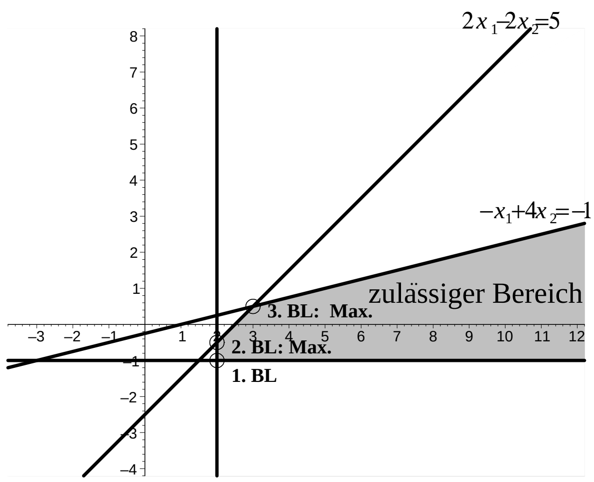
$$\boxed{\begin{array}{rcl} -x_1' + x_2' & & \longrightarrow \max \\ -2x_1' + 2x_2' + \boldsymbol{u_1} & = & 1 \\ -x_1' + 4x_2' \quad + \boldsymbol{u_2} & = & 5 \\ x_1',\ x_2',\ u_1,\ u_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

BV	c_B	x_1' -1	x_2' 1	u_1 0	u_2 0	x_B	θ	
u_1	0	-2	2	1	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1.BL: $x_1'=x_2'=0, u_1=1, u_2=5 \Rightarrow x_1=2, x_2=-1$
u_2	0	-1	4	0	1	5	$\frac{5}{4}$	
		1	$\boxed{-1}$	0	0	0		
x_2'	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	—	2.BL: $x_1'=u_1=0, x_2'=\frac{1}{2}, u_2=3 \Rightarrow x_1=2, x_2=-\frac{1}{2}$
u_2	0	3	0	-2	1	3	$\boxed{1}$	alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Max., Δ_j ist auch für Nicht–BV
		$\boxed{0}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		x_1' gleich 0. $\Rightarrow$ Weiterrechnung möglich.
x_2'	1	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	3.BL: $u_1=u_2=0, x_1'=1, x_2'=\frac{3}{2} \Rightarrow x_1=3, x_2=\frac{1}{2}$
x_1'	-1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\boxed{3}$	alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Max., Δ_j ist auch für Nicht–BV
		0	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$		u_2 gleich 0, Weiterrechn. führt zurück zu 2.BL.

Alle Punkte auf der Kante zwischen den Ecken $(x_1', x_2') = (0, \frac{1}{2}) \ \widehat{=}\ (x_1, x_2) = (2, -\frac{1}{2})$ und $(x_1', x_2') = (1, \frac{3}{2}) \ \widehat{=}\ (x_1, x_2) = (3, \frac{1}{2})$ sind optimale Lösungen, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1; \qquad \text{Maximum: } z^* = z'^* + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$



Minimierung der Zielfunktion:

Hier muss lediglich statt der Funktion $z' = z - 1$ die Funktion $-z' = -z + 1 = x_1' - x_2'$ maximiert werden, Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1' - x_2' & & \longrightarrow \max \\ -2x_1' + 2x_2' + \boldsymbol{u_1} & = & 1 \\ -x_1' + 4x_2' \quad + \boldsymbol{u_2} & = & 5 \\ x_1',\ x_2',\ u_1,\ u_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

		x_1'	x_2'	u_1	u_2			
BV	c_B	1	−1	0	0	x_B	θ	
u_1	0	−2	2	1	0	1	—	1.BL: $x_1' = x_2' = 0, u_1 = 1, u_2 = 5 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$
u_2	0	−1	4	0	1	5	—	alle a_{i1} nichtpositiv $\Longrightarrow$
		$\boxed{-1}$	1	0	0	0		ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

Simplexverfahren: II. Version Austauschverfahren

(Literatur: Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner)

Variable: $x_1' = x_1 - 2 \ge 0,\ x_2' = x_2 + 1 \ge 0$, d.h. $x_1 = x_1' + 2,\ x_2 = x_2' - 1$,

Zielfunktion: $z = -(x_1'+2) + (x_2'-1) + 4 = -x_1' + x_2' + 1$,

NB1: $2(x_1'+2) - 2(x_2'-1) - x_3 = 5 \Longrightarrow 2x_1' - 2x_2' - x_3 = -1 \Longrightarrow -2x_1' + 2x_2' + x_3 = 1$

NB2: $-(x_1'+2) + 4(x_2'-1) + x_4 = -1 \Longrightarrow -x_1' + 4x_2' + x_4 = 5$

Minimierung der Zielfunktion: Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -x_1' + x_2' + 1 & \longrightarrow & \min \\ -2x_1' + 2x_2' + \mathbf{x_3} & = & 1 \\ -x_1' + 4x_2' + \mathbf{x_4} & = & 5 \\ x_1',\ x_2',\ x_3,\ x_4 & \ge & 0 \end{array}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{array}{rl} z = & -x_1' + x_2' + 1 \longrightarrow \min \\ x_3 = & 2x_1' - 2x_2' + 1 \\ x_4 = & x_1' - 4x_2' + 5 \\ & x_1',\ x_2',\ x_3,\ x_4 \ge 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

S_0	NBV	x_1'	x_2'			
BV	c	−1	1	1	θ	
x_3	0	2	−2	1	—	1.BL: $x_1' = x_2' = 0, x_3 = 1, x_4 = 5 \Longrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$
x_4	0	1	−4	5	—	alle m_{i1} nichtnegativ $\Longrightarrow$
		$\boxed{-1}$	1	1		ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

Maximierung der Zielfunktion:

Hier muss lediglich statt der Funktion z die Funktion $-z = x_1' - x_2' - 1$ minimiert werden,

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1' - x_2' - 1 & \longrightarrow & \min \\ -2x_1' + 2x_2' + \mathbf{x_3} & = & 1 \\ -x_1' + 4x_2' + \mathbf{x_4} & = & 5 \\ x_1',\ x_2',\ x_3,\ x_4 & \ge & 0 \end{array}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{array}{rl} -z = & x_1' - x_2' - 1 \longrightarrow \min \\ x_3 = & 2x_1' - 2x_2' + 1 \\ x_4 = & x_1' - 4x_2' + 5 \\ & x_1',\ x_2',\ x_3,\ x_4 \ge 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

S_0	NBV	x_1'	x_2'			
BV	c	1	−1	−1	θ	
x_3	0	2	$\boxed{-2}$	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1.BL: $x_1' = x_2' = 0, x_3 = 1, x_4 = 5 \Longrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$
x_4	0	1	−4	5	$\frac{5}{4}$	
		1	$\boxed{-1}$	−1		

S_1	NBV	x_1'	x_3		
BV	c	1	0	-1	θ
x_2'	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—
x_4	0	$\boxed{-3}$	2	3	$\boxed{1}$
		$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	

2.BL: $x_1' = x_3 = 0, x_2' = \frac{1}{2}, x_4 = 3 \implies x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$
alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Max., Sondersituation: Δ_j ist für Nicht–BV x_1' gleich 0. $\implies$ Weiterrechnung möglich.

S_2	NBV	x_4	x_3		
BV	c	0	0	-1	θ
x_2'	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_1'	1	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	1	$\boxed{3}$
		$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	

3.BL: $x_3 = x_4 = 0, x_1' = 1, x_2' = \frac{3}{2} \implies x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}$
alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Max., Δ_j ist für Nicht–BV x_4 gleich 0, Weiterrechnung führt zurück zu 2. BL.

Alle Punkte auf der Kante zwischen den Ecken $(x_1', x_2') = (0, \dfrac{1}{2}) \;\widehat{=}\; (x_1, x_2) = (2, -\dfrac{1}{2})$ und $(x_1', x_2') = (1, \dfrac{3}{2}) \;\widehat{=}\; (x_1, x_2) = (3, \dfrac{1}{2})$ sind optimale Lösungen, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1; \qquad \text{Maximum: } z^* = -z'^* = \frac{3}{2}.$$

Skizze siehe oben bei I. Version