Aufgabe 8.16

Bestimmen Sie unter den Nebenbedingungen $2x_1+3x_2 \leq 21$, $3x_1+2x_2 \leq 24$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 5$ die Optima der Zielfunktionen

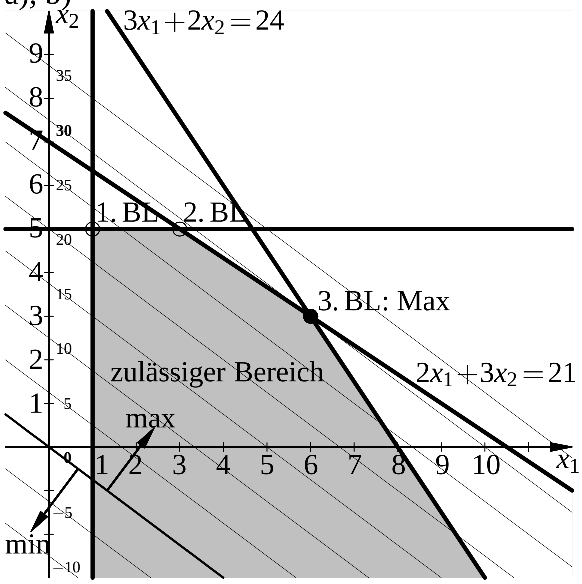
a) $z = 3x_1+4x_2 \longrightarrow \max$,
b) $z = 3x_1+4x_2 \longrightarrow \min$,
c) $z = 4x_1+6x_2 \longrightarrow \max$

jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die beim Simplexverfahren durchlaufenen Basislösungen jeweils in die Skizze der grafischen Lösung ein! Für welche Argumente x_1, x_2 werden die Optima erreicht?

Lösung:

Grafische Lösung

a), b)



Niveaulinien der Zielfunktion $z=3x_1+4x_2$

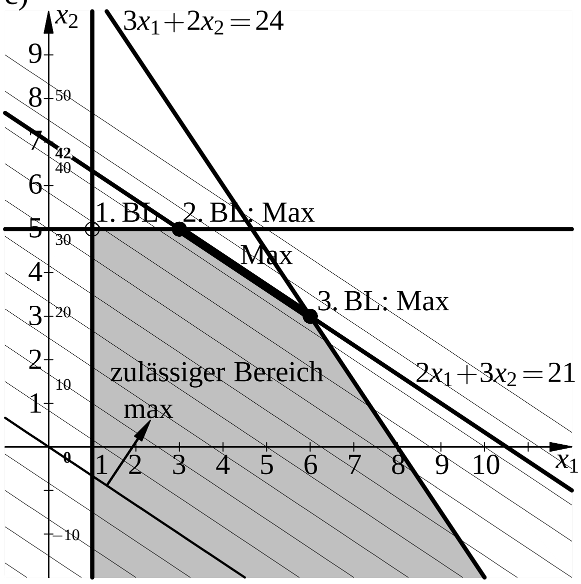
Maximierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach rechts oben. Der zulässige Bereich wird verlassen im Schnittpunkt der Geraden $2x_1+3x_2=21$ und $3x_1+2x_2=24$:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=21 \quad &|\cdot 3\\ 3x_1+2x_2&=24 \quad &|\cdot 2\\ 6x_1+9x_2&=63 \quad &|+\\ 6x_1+4x_2&=48 \quad &|-\\ 5x_2&=15,\quad x_2=3,\ x_1=6 \end{aligned}$$

Also wird das Maximum für $x_1=6,\ x_2=3$ angenommen, der maximale Zielfunktionswert beträgt 30.

Minimierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach links unten. Das ist beliebig weit möglich, die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach unten unbeschränkt und die Aufgabe damit nicht lösbar.

c)



Niveaulinien der Zielfunktion $z=4x_1+6x_2$

Maximierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach links oben. Der zulässige Bereich wird verlassen auf dem Abschnitt der Geraden $2x_1+3x_2=21$ zwischen den Punkten $(3,5)$ und $(6,3)$.

Also wird das Maximum für die Punkte $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $0\le t\le 1$ angenommen, der maximale Zielfunktionswert beträgt 42.

Transformation in Normalform und Lösung mit dem Simplexverfahren
(**Version Gaußalgorithmus**,
Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

Variablensubstitution: $x_1'=x_1-1\ge 0,\quad x_1=x_1'+1$
$x_2'=5-x_2\ge 0,\quad x_2=5-x_2'$

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=2(x_1'+1)+3(5-x_2')=2x_1'+2+15-3x_2'\le 21, \qquad & 2x_1'-3x_2'&\le 4\\ 3x_1+2x_2&=3(x_1'+1)+2(5-x_2')=3x_1'+3+10-2x_2'\le 24, \qquad & 3x_1'+2x_2'&\le 11 \end{aligned}$$

NB in Gleichungsform mit Schlupfvariablen:
$$\begin{aligned} 2x_1'-3x_2'+\boldsymbol{u_1} \qquad &= 4\\ 3x_1'-2x_2' \qquad +\boldsymbol{u_2}&=11 \end{aligned}$$

a) Zielfunktion: $z=3x_1+4x_2=3(x_1'+1)+4(5-x_2')=3x_1'-4x_2'+23 \longrightarrow \max,$
$z'=3x_1'-4x_2' \longrightarrow \max, \quad z=z'+23$

		x_1'	x_2'	u_1	u_2			
BV	c_B	3	-4	0	0	x_B	θ	
u_1	0	2	-3	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	4	$\boxed{2}$	1. Basislösung
u_2	0	3	-2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	11	$\frac{11}{3}$	$x_1'=x_2'=0, u_1=4, u_2=11 \Rightarrow x_1=1, x_2=5$
		$\boxed{-3}$	4	0	0	0		$z'=0$
x_1'	3	$\mathbf{1}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	2	—	2. Basislösung
u_2	0	$\mathbf{0}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\mathbf{1}$	5	$\boxed{2}$	$x_2'=u_1=0, x_1'=2, u_2=5 \Rightarrow x_1=3, x_2=5$
		0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	0	6		$z'=6$
x_1'	3	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	5		3. Basislösung
x_2'	-4	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	2		$u_1=u_2=0, x_1'=5, x_2'=2 \Rightarrow x_1=6, x_2=3$
		0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	7		$z'=7 \Rightarrow z=30$, alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Optimum

Da die Optimalitätsindikatoren für die Nichtbasisvariablen positiv sind, ist $z(6,3)=30$ das eindeutige Maximum.

b) Zielfunktion: $z=3x_1+4x_2=3(x_1'+1)+4(5-x_2')=3x_1'-4x_2'+23 \longrightarrow \min,$
$z'=-3x_1'+4x_2' \longrightarrow \max, \quad z=-z'+23$

		x_1'	x_2'	u_1	u_2			
BV	c_B	-3	4	0	0	x_B	θ	
u_1	0	2	-3	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	4	—	1. Basislösung wie bei a)
u_2	0	3	-2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	11	—	alle a_{i2} nichtpositiv $\Longrightarrow$
		3	$\boxed{-4}$	0	0	0		ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

c) Zielfunktion: $z=4x_1+6x_2=4(x_1'+1)+6(5-x_2')=4x_1'-6x_2'+34 \longrightarrow \max,$
$z'=4x_1'-6x_2' \longrightarrow \max, \quad z=z'+34$

		x_1'	x_2'	u_1	u_2			
BV	c_B	4	-6	0	0	x_B	θ	
u_1	0	2	-3	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	4	$\boxed{2}$	1. Basislösung
u_2	0	3	-2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	11	$\frac{11}{3}$	$x_1=1, x_2=5, u_1=4, u_2=11, z'=0, z=34$
		$\boxed{-4}$	6	0	0	0		
x_1'	4	$\mathbf{1}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	2	—	2. Basislösung optimal, da alle $\Delta_j \geq 0$
u_2	0	$\mathbf{0}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\mathbf{1}$	5	$\boxed{2}$	$x_1=3, x_2=5, u_1=0, u_2=5, z'=8, z=42$
		0	$\boxed{0}$	2	0	8		Weiterrechn. mögl., da Δ_j für NBV x_2' gleich 0
x_1'	4	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	5	$\frac{25}{3}$	3. Basislösung optimal
x_2'	-6	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	2	$\boxed{5}$	$x_1=6, x_3=5, u_1=0, u_2=0, z'=8, z=42$
		0	0	2	$\boxed{0}$	8		Weiterrechn. führt zurück auf 2. Basislösung

Alle Punkte auf der Kante zwischen den Ecken $(x_1,x_2)=(3,5)$ und $(x_1,x_2)=(6,3)$, d.h. alle Punkte $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ sind optimale Lösungen, für sie ergibt sich der optimale Zielfunktionswert $z(x_1^*,x_2^*)=4(3+3t)+6(5-2t)=42$.