

Aufgabe 8.12

$$\begin{array}{rclcl} \text{Lösen Sie das lineare Gleichungssystem} & x_1 + x_2 & & + x_5 & = 8 \\ & & & x_3 + x_4 & + x_6 = 8 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & & & = 0 \end{array}$$

mit dem Gaußschen Algorithmus! Welche der Variablen in der von Ihnen ermittelten Lösung werden im Zusammenhang mit dem Simplexverfahren als Basisvariablen, welche werden als Nichtbasisvariablen bezeichnet? Geben Sie eine Basislösung an!

Lösung:

Es bietet sich an, x_5 und x_6 als „erste“ Variablen zu verwenden, da für diese die Koeffizientenmatrix schon Einheitsspalten enthält. Nimmt man dann x_4 als nächste Variable, so erhält man ein besonders leicht zu bearbeitendes Koeffizientenschema:

x_5	x_6	x_4	x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1	1	0	8
0	1	1	0	0	1	8
0	0	-1	2	-1	3	0
1	0	0	1	1	0	8
0	1	1	0	0	1	8
0	0	1	-2	1	-3	0
1	0	0	1	1	0	8
0	1	0	2	-1	4	8
0	0	1	-2	1	-3	0

Mit $r=x_1$, $s=x_2$, $t=x_3$ erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die als Parameter gewählten Variablen x_1 , x_2 und x_3 werden im Zusammenhang mit dem Simplexverfahren als **Nichtbasisvariablen**, die anderen Variablen x_4 , x_5 , x_6 als **Basisvariablen** bezeichnet, ferner heißt eine Lösung **Basislösung**, wenn die Nichtbasisvariablen gleich 0 sind. Also ist $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=8$, $x_6=8$ Basislösung. Diese Lösung springt bei Betrachtung des Gleichungssystems fast ins Auge. Das liegt daran, dass die ersten beiden Zeilen Variablen enthalten, die nur in diesen Zeilen vorkommen. Diese kann man zweckmäßigerweise als Basisvariablen verwenden.

Nun kann das Gleichungssystem allerdings auch in anderer Weise gelöst werden, so dass andere Variablen Basisvariablen werden. Damit ergeben sich weitere Basislösungen.