

Aufgabe 8.11

Ein Getränkehersteller stellt aus Wasser und zwei Zusatzstoffen Z_1 und Z_2 Grundmischungen B_1 , B_2 und B_3 und aus den Grundmischungen und aus Wasser Fertiggetränke G_1 und G_2 her. Im Einzelnen werden für eine Einheit Grundmischung B_1 12 Einheiten Wasser, 3 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 , für eine Einheit B_2 15 Einheiten Wasser, 2 Einheiten Z_1 und 4 Einheiten Z_2 und für eine Einheit B_3 10 Einheiten Wasser, 2 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 benötigt. Für eine Einheit Fertiggetränk G_1 werden 2 Einheiten B_1 , eine Einheit B_3 und 20 Einheiten Wasser benötigt, während für eine Einheit G_2 je eine Einheit B_1 , B_2 und B_3 sowie 30 Einheiten Wasser benötigt werden.

Für die Herstellung von y_i Einheiten Fertiggetränk G_i ($i = 1, 2$) und zusätzlich x_i Einheiten Grundmischung B_i ($i = 1, 2, 3$) sollen 705 Einheiten Wasser, 105 Einheiten Z_1 und 120 Einheiten Z_2 vollständig verbraucht werden. Die Fertiggetränke G_1 und G_2 werden zu Preisen von 40 bzw. 53 Geldeinheiten pro Einheit verkauft, die Grundmischungen B_1 , B_2 und B_3 zu Preisen von 8, 12 bzw. 4 Geldeinheiten pro Einheit. Sämtliche Ausgangsstoffe, Zwischen- und Endprodukte können beliebig geteilt werden, also nicht nur in ganzen Einheiten verwendet oder abgegeben werden. Ermitteln Sie die zur Erzielung des unter den gegebenen Bedingungen maximal erreichbaren Erlöses herzustellenden Mengen und den dabei erreichbaren Erlös!

Lösung:

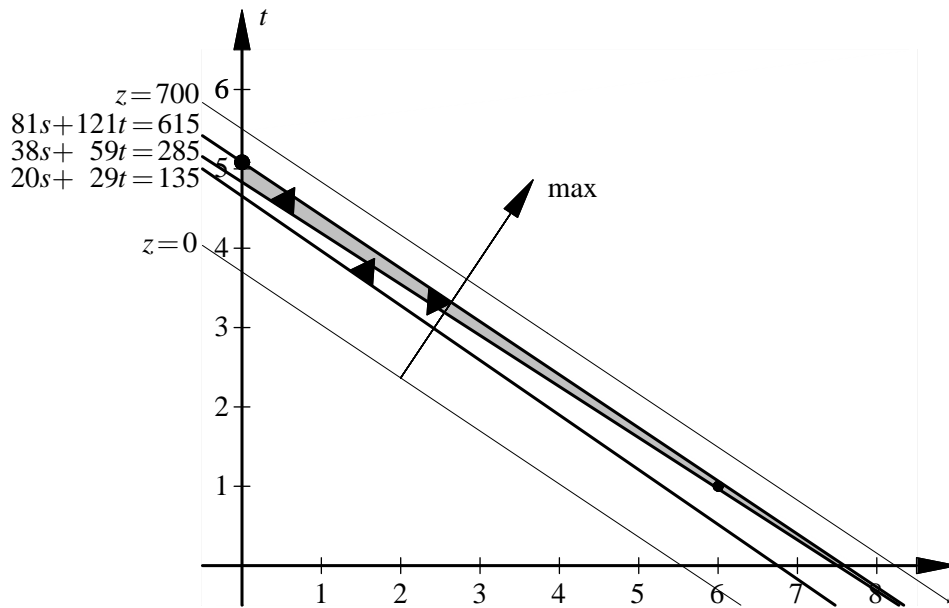
Bis auf die hier nicht mehr zu fordernde Ganzzahligkeit stimmt das Modell mit dem aus Aufgabe 8.10 überein:

$$\begin{aligned} z &= 8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 40y_1 + 53y_2 \longrightarrow \max \\ 12x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 54y_1 + 67y_2 &= 705 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8y_1 + 7y_2 &= 105 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6y_1 + 8y_2 &= 120 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Menge der zulässigen Lösungen wurde bei Aufgabe Aufgabe 8.10 ermittelt und grafisch dargestellt. Zur grafischen Lösung der Optimierungsaufgabe ist in die Zeichnung zu Teil c) dieser Aufgabe noch ein Zielfunktionsniveau einzuzeichnen und in Maximierungsrichtung parallel zu verschieben, bis es den zulässigen Bereich verlässt.

$$\text{Wegen } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -285 \\ -135 \\ 615 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 38 \\ 20 \\ -81 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 59 \\ 29 \\ -121 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} z &= 8(-285 + 38s + 59t) + 12(-135 + 20s + 29t) + 4(615 - 81s - 121t) + 40s + 53t \\ &= 260s + 389t - 1440. \end{aligned}$$



Das Nullniveau ist $260s + 389t = 1440$, die Maximierung erfolgt in Richtung rechts oben. Die Gerade hat einen Anstieg von $-260/389 \approx -0.66838$, sie ist damit geringfügig flacher als die rechte obere Begrenzungslinie des zulässigen Bereichs $81s + 121t = 615$, deren Anstieg $-121/81 \approx -0.66942$ beträgt. Bei Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus wird der zulässige Bereich also im Punkt links oben verlassen, dort ist $s = 0$ und $t = 615/121 \approx 5.08$.

Für die optimale Lösung sind also $615/121 \approx 5.08$ Einheiten Fertiggetränk G_2 und zusätzlich $1800/121 \approx 14.88$ Einheiten Grundmischung B_1 und $1500/121 \approx 12.40$ Einheiten Grundmischung B_2 herzustellen. Das Fertiggetränk G_1 ist überhaupt nicht herzustellen, ebenso wenig zusätzliche Einheiten B_3 . Der maximal erzielbare Erlös beträgt $64995/121 \approx 537.15$ Geldeinheiten.

Im Vergleich mit Aufgabe 8.10 ist das Ergebnis insofern bemerkenswert, als dass dort im ganzzahligen Fall des Maximum rechts unten ($s = 6, t = 1$) angenommen wird, hier im nichtganzzahligen Fall aber links oben. In der Ecke rechts unten ist hier wegen $s = 615/81 \approx 7.59, t = 0$ der Erlös mit $z = 43260/81 \approx 534.07$ tatsächlich kleiner als in der Ecke links oben.

Der Unterschied zum ganzzahligen Fall ist darin begründet, dass die ganzzahligen Lösungspunkte auf einer Geraden mit Anstieg $-2/3 \approx 0.66667$ liegen, die damit geringfügig steiler ist als die Niveaugeraden der Zielfunktion.