Aufgabe 8.10

Eine Elektronikfirma stellt aus Draht, Spulen und Widerständen Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und aus den Baugruppen und aus Draht Geräte G_1 und G_2 her. Im Einzelnen werden für eine Baugruppe B_1 12 Einheiten Draht, 3 Spulen und 2 Widerstände, für eine Baugruppe B_2 15 Einheiten Draht, 2 Spulen und 4 Widerstände und für eine Baugruppe B_3 10 Einheiten Draht, 2 Spulen und 2 Widerstände benötigt. Für ein Gerät G_1 werden 2 Baugruppen B_1, eine Baugruppe B_3 und 20 Einheiten Draht benötigt, während für ein Gerät G_2 je eine Baugruppe B_1, B_2 und B_3 sowie 30 Einheiten Draht benötigt werden.

Für die Herstellung von y_i Geräten G_i $(i=1,2)$ und zusätzlich x_i Baugruppen B_i $(i=1,2,3)$ sollen 705 Einheiten Draht, 105 Spulen und 120 Widerstände vollständig verbraucht werden. Die Geräte G_1 und G_2 werden zu Preisen von 40 bzw. 53 Geldeinheiten verkauft, die Baugruppen B_1, B_2 und B_3 zu Preisen von 8, 12 bzw. 4 Geldeinheiten. Ermitteln Sie die zur Erzielung des unter den gegebenen Bedingungen maximal erreichbaren Erlöses herzustellenden Stückzahlen und den dabei erreichbaren Erlös! Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf!
b) Lösen Sie das Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 mit dem Gaußalgorithmus zunächst ohne Rücksicht auf Ganzzahligkeits- und Nichtnegativitätsforderungen! Stellen Sie die Lösung dabei so dar, dass y_1 und y_2 frei gewählt werden können.
c) Nun soll gesichert werden, dass weder die Anzahl der herzustellenden Geräte noch die der Baugruppen negativ wird. Stellen Sie dazu aus der Lösung von b) ein lineares Ungleichungssystem auf und lösen dieses auf grafischem Wege!
d) Schließlich soll noch gesichert werden, dass die Anzahl der herzustellenden Geräte und Baugruppen ganzzahlig ist. Welche Lösungen sind möglich?
e) Welche der Lösungen ist optimal?

Lösung:

a) Aufwandsmatrizen für den Bedarf an Ausgangsmaterial und Baugruppen, s. Aufgabe 6.74:

Ausgangsmaterial — Baugruppen

	je B_1	je B_2	je B_3
Draht	12	15	10
Spule	3	2	2
Widerstand	2	4	2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Baugruppen — Geräte

	je G_1	je G_2
B_1	2	1
B_2	0	1
B_3	1	1

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgangsmaterial — Geräte

direkt

	je G_1	je G_2
Draht	20	30
Spule	0	0
Widerstand	0	0

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über Baugruppen:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 37 \\ 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

insgesamt also $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 54 & 67 \\ 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich für den in einer Spalte angeordneten Verbrauch an Ausgangsmaterial

$$\begin{array}{l} \text{Draht:} \\ \text{Spulen:} \\ \text{Widerstände:} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 67 \\ 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 705 \\ 105 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Das Modell lautet also

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Erlös:} & z = 8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 40y_1 + 53y_5 & \longrightarrow & \max \\
\text{Draht:} & 12x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 54y_1 + 67y_2 & = & 705 \\
\text{Spulen:} & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8y_1 + 7y_2 & = & 105 \\
\text{Widerstände:} & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6y_1 + 8y_2 & = & 120 \\
\text{Nichtnegativität, Ganzzahligkeit:} & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad y_1, \quad y_2 & \geq & 0, \text{ ganz.}
\end{array}$$

b) Für die Gaußelimination empfiehlt sich eine Division der dritten Gleichung durch 2 und Vertauschung mit der ersten Gleichung:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		
1	2	1	3	4	60	
3	2	2	8	7	105	$\vert\ \mathrm{II} - 3\,\mathrm{I}$
12	15	10	54	67	705	$\vert\ \mathrm{III} - 12\,\mathrm{I}$
1	2	1	3	4	60	
0	−4	−1	−1	−5	−75	
0	−9	−2	18	19	−15	

x_1	x_3	x_2	y_1	y_2		
1	1	2	3	4	60	
0	1	4	1	5	75	
0	−2	−9	18	19	−15	$\vert\ \mathrm{III} + 2\,\mathrm{II}$
1	1	2	3	4	60	
0	1	4	1	5	75	
0	0	−1	20	29	135	$\vert\ \mathrm{III} \cdot (-1)$

x_1	x_3	x_2	y_1	y_2		
1	1	2	3	4	60	$\vert\ \mathrm{I} - 2\,\mathrm{III}$
0	1	4	1	5	75	$\vert\ \mathrm{II} - 4\,\mathrm{III}$
0	0	1	−20	−29	−135	
1	1	0	43	62	330	$\vert\ \mathrm{I} - \mathrm{II}$
0	1	0	81	121	615	
0	0	1	−20	−29	−135	
1	0	0	−38	−59	−285	
0	1	0	81	121	615	
0	0	1	−20	−29	−135	

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
1	0	0	−38	−59	−285
0	1	0	−20	−29	−135
0	0	1	81	121	615

Bringt man die Terme mit y_1 und y_2 auf die rechte Seite und wählt als Parameter $s = y_1$ und $t = y_2$, so erhält man schließlich als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -285 \\ -135 \\ 615 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 38 \\ 20 \\ -81 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 59 \\ 29 \\ -121 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es muss gelten

$$\begin{array}{rcl}
x_1 = -285 + 38s + 59t \geq 0 & \Longleftrightarrow & 38s + 59t \geq 285 \\
x_2 = -135 + 20s + 29t \geq 0 & \Longleftrightarrow & 20s + 29t \geq 135 \\
x_3 = 615 - 81s - 121t \geq 0 & \Longleftrightarrow & 81s + 121t \leq 615 \\
y_1 = s \geq 0 & \Longleftrightarrow & s \geq 0 \\
y_2 = t \geq 0 & \Longleftrightarrow & t \geq 0 \ .
\end{array}$$

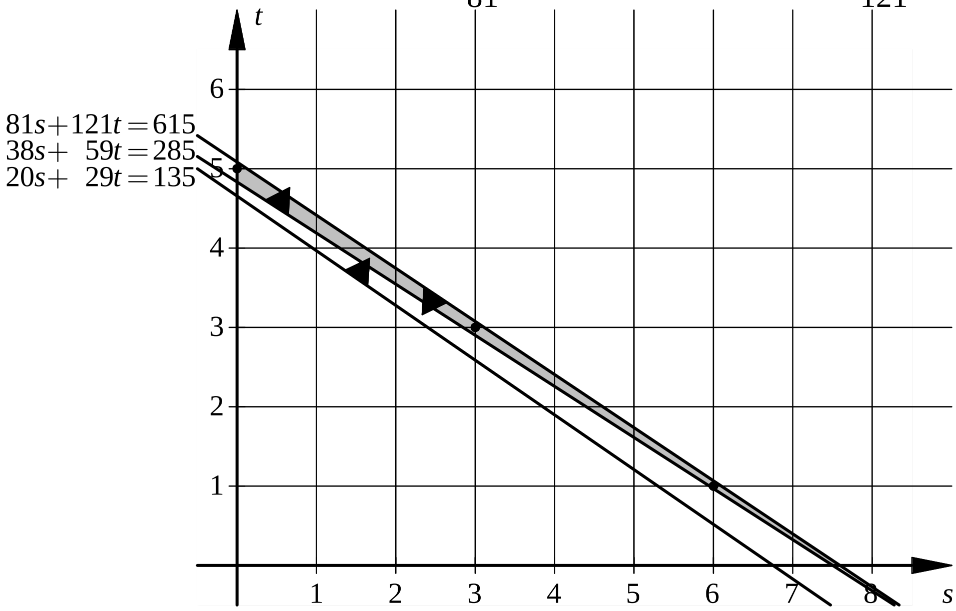
Die Ungleichungen können in einem Koordinatensystem für s und t dargestellt werden. Die 4. und 5. Gleichung beschreiben den I. Quadranten (einschließlich der Halbachsen), die 1. und 2. Gleichung die Gebiete rechts oberhalb der Geraden $38s+59t=285$ bzw. $20s+29t=135$ und die 3. Gleichung das Gebiet links unterhalb der Gerade $81s+121t=615$ (jeweils einschließlich der Geraden).

Achsenschnittpunkte der Geraden:

$$38s+59t=285: \quad t=0 \Rightarrow s=\frac{285}{38}=7.5\ , \quad s=0 \Rightarrow t=\frac{285}{59}\approx 4.83$$

$$20s+29t=135: \quad t=0 \Rightarrow s=\frac{135}{20}=6.75, \quad s=0 \Rightarrow t=\frac{135}{29}\approx 4.66$$

$$81s+121t=615: \quad t=0 \Rightarrow s=\frac{615}{81}\approx 7.59, \quad s=0 \Rightarrow t=\frac{615}{121}\approx 5.08$$



Die Bedingungen sind gleichzeitig nur in dem schmalen Streifen zwischen den Abschnitten der Geraden $38s+59t=285$ und $81s+121t=615$ im I. Quadranten (einschließlich der Ränder) erfüllt. Will man diese Fläche durch Formeln beschreiben, so kann man sie in der Form

$$\left\{(s,t): 0\le t\le \tfrac{285}{59},\ \tfrac{285}{38}-\tfrac{59}{38}t\le s\le \tfrac{615}{81}-\tfrac{121}{81}t\right\}\bigcup\left\{(s,t): \tfrac{285}{59}<t\le \tfrac{615}{121},\ 0\le s\le \tfrac{615}{81}-\tfrac{121}{81}t\right\}$$

notieren. (Solche Darstellungen werden z.B. benötigt, wenn Integrale über derartigen Flächen zu berechnen sind.)

d) Es muss noch ermittelt werden, welche Paare ganzzahliger Punkte in dem in der Abbildung bei c) grau unterlegten Gebiet liegen. Beim Blick darauf ist offensichtlich, dass $s=0, t=5$ eine solche Lösung ist und weitere Lösungen nur bei $t=4,3,2,1$ möglich sein können. Für $t=0$ müsste s ungefähr zwischen 7.5 und 7.59 liegen, kann also nicht ganzzahlig sein.

$$t=4: \quad 1.29\approx \frac{285}{38}-\frac{59}{38}\cdot 4\le s\le \frac{615}{81}-\frac{121}{81}\cdot 4\approx 1.62: \quad \text{keine Lösung}$$

$$t=3: \quad 2.84\approx \frac{285}{38}-\frac{59}{38}\cdot 3\le s\le \frac{615}{81}-\frac{121}{81}\cdot 3\approx 3.11: \quad \text{Lösung } s=3, t=3$$

$$t=2: \quad 4.39\approx \frac{285}{38}-\frac{59}{38}\cdot 2\le s\le \frac{615}{81}-\frac{121}{81}\cdot 2\approx 4.60: \quad \text{keine Lösung}$$

$$t=1: \quad 5.95\approx \frac{285}{38}-\frac{59}{38}\cdot 1\le s\le \frac{615}{81}-\frac{121}{81}\cdot 1\approx 6.10: \quad \text{Lösung } s=6, t=1$$

Es gibt also 3 Möglichkeiten, das vorhandene Material vollständig zu verbrauchen:

	$s=0, t=5$	$s=3, t=3$	$s=6, t=1$
herzustellende Baugruppen B_1:	10	6	2
herzustellende Baugruppen B_2:	10	12	14
herzustellende Baugruppen B_3:	10	9	8
herzustellende Geräte G_1:	0	3	6
herzustellende Geräte G_2:	5	3	1

e) Die Erträge für die drei zulässigen Lösungen sind $z(10,10,10,0,5) = 505$, $z(6,12,9,3,3) = 507$, $z(2,14,8,6,1) = 509$, so dass sich der maximale Erlös bei der dritten Lösung ergibt. Dies ist die Lösung, die ma Wahl der Parameter $s=6$ und $t=1$ erhält.

Es sind also 6 Geräte B_1 und ein Gerät B_2 sowie 2 Baugruppen B_1, 14 Baugruppen B_2 und 8 Baugruppen B_3 herzustellen, damit ist ein Erlös von 509 Geldeinheiten erreichbar.