Aufgabe 8.7

Lösen Sie folgende Optimierungsaufgaben auf grafischem Wege:

a)	b)	c)	d)
$-x_1 + x_2 \to \max$	$-x_1 + x_2 \to \min$	$-4x_1 + 2x_2 \to \max$	$-x_1 + x_2 \to \max$
$2x_1 - x_2 \geq 2$	$2x_1 - x_2 \geq 2$	$2x_1 - x_2 \geq 2$	$2x_1 - x_2 \geq 2$
$-x_1 + 2x_2 \leq 5$	$-x_1 + 2x_2 \leq 5$	$-x_1 + 2x_2 \leq 5$	$3x_1 - x_2 \leq 3$
$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1$	$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1$	$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1$	$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 1$

Lösung:

Grafische Lösung zweidimensionaler linearer Optimierungsaufgaben

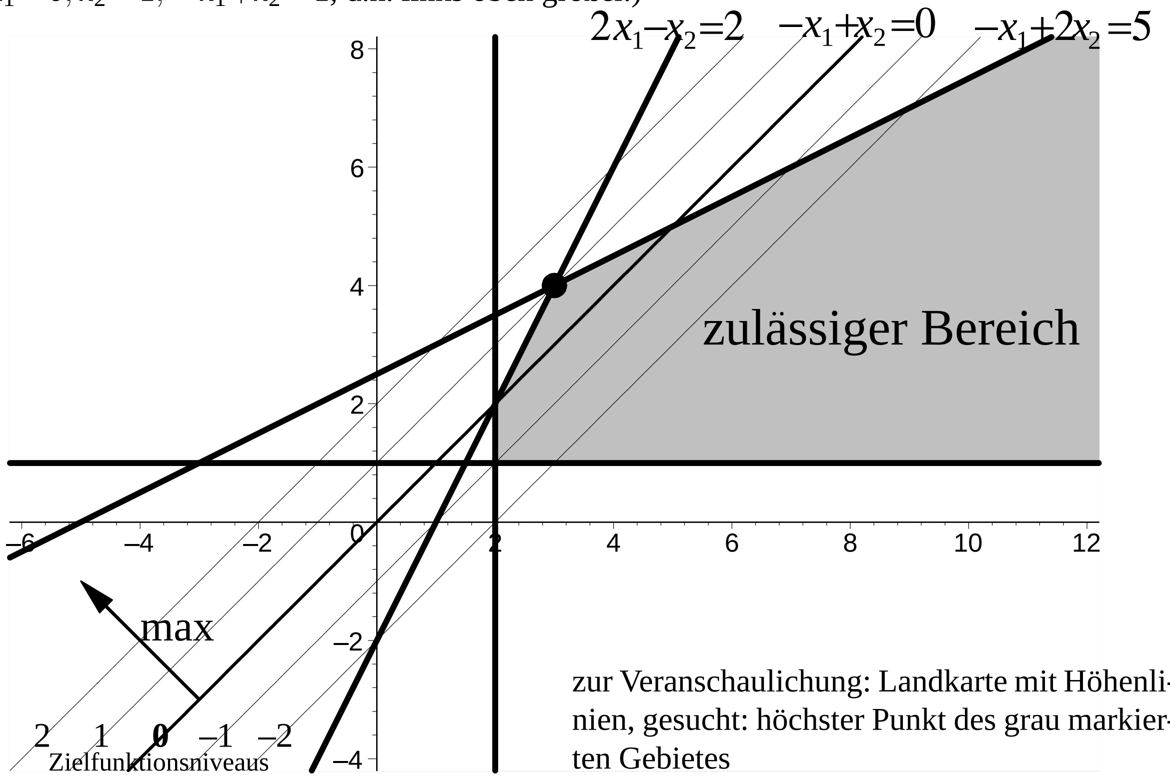
Schritte:
- Darstellung des zulässigen Bereichs (Lösung eines lin. Ungleichungssystems)
- Konstruktion eines ZF–Niveaus (z.B. Nullniveau)
- Ermittlung der Optimierungsrichtung
- Parallelverschiebung des ZF–Niveaus zum Optimum (dort, wo zulässiger Bereich verlassen wird)
- Berechnung der optimalen Werte und des optimalen Zielfunktionsniveaus

a) Zeichnen für Lösungsmenge von Ungleichungen zunächst die Ränder (Gleichungen):

$2x_1 - x_2 = 2:$ Achsenabschnitte: $x_2 = 0 \ \to\ x_1 = 1,\ \ x_1 = 0 \ \to\ x_2 = -2$
$\geq 2:$ wenn x_1 größer und x_2 kleiner, d.h. rechts unterhalb,

$-x_1 + 2x_2 = 5:$ Achsenabschnitte: $x_2 = 0 \ \to\ x_1 = -5 \ \ x_1 = 0 \ \to\ x_2 = \dfrac{5}{2}$
$\leq 5:$ wenn x_1 größer und x_2 kleiner, d.h. rechts unterhalb

Nullniveau der Zielfunktion: $-x_1 + x_2 = 0 \iff x_2 = x_1$
wird größer, wenn x_1 fällt und x_2 wächst, d.h. Maximierungsrichtung nach links oben
(Man kann sich das auch durch Einsetzen eines konkreten Punktes überlegen, z.B. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $-x_1 + x_2 = 1$, d.h. links oben größer.)

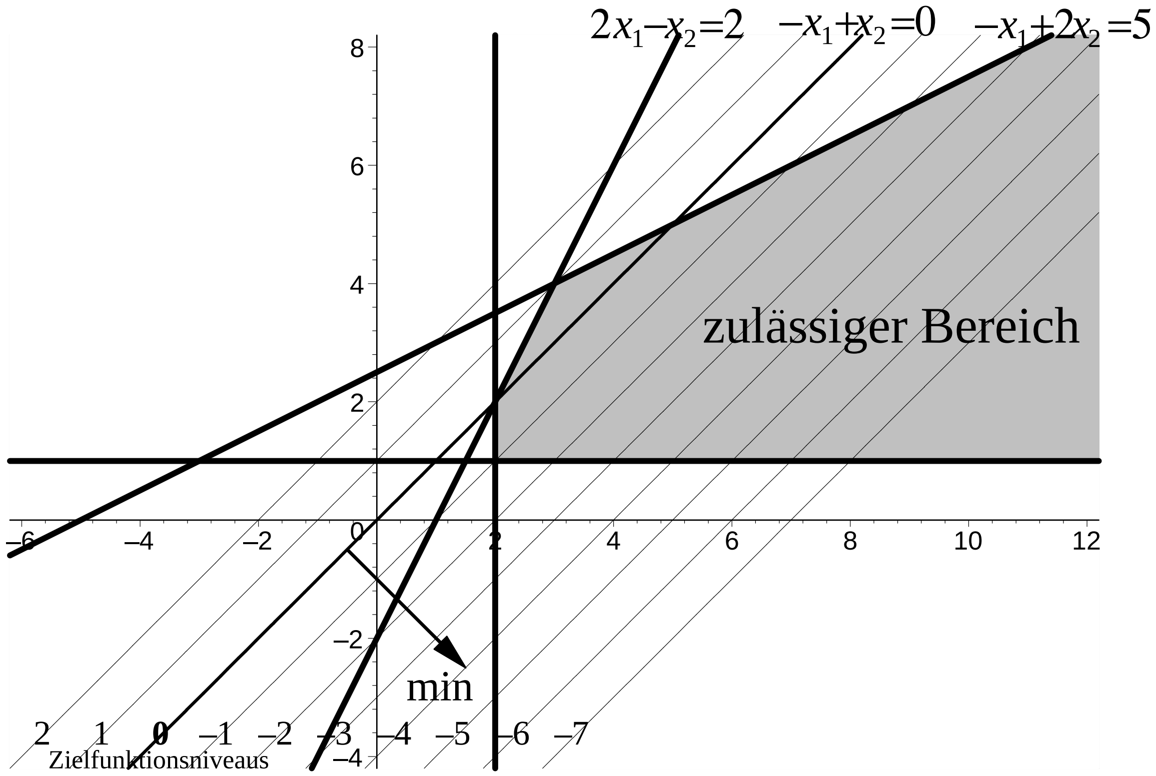


zur Veranschaulichung: Landkarte mit Höhenlinien, gesucht: höchster Punkt des grau markierten Gebietes

Parallelverschiebung der Niveaulinien verlässt zulässigen Bereich im Schnitt von

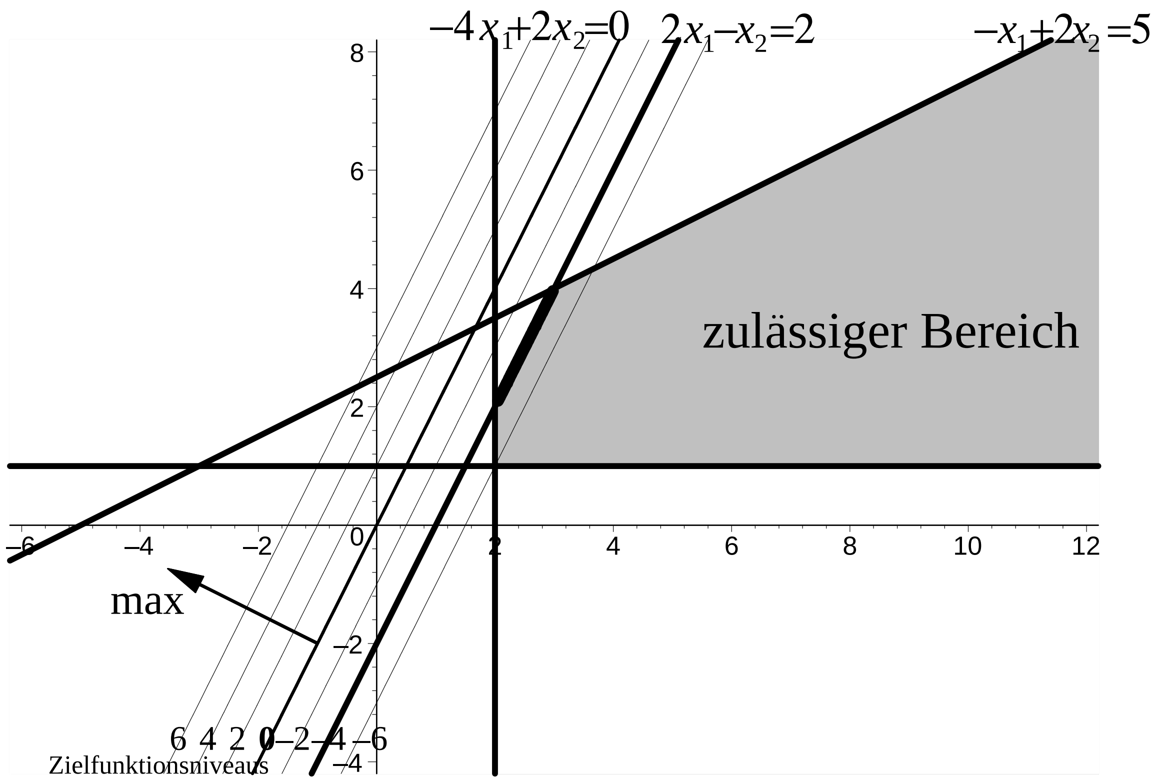
$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - \ \ x_2 = \ \ 2 & \mid + \\ - \ x_1 + 2x_2 = \ \ 5 \mid \cdot 2 & \\ -2x_1 + 4x_2 = 10 & \mid + \end{array}\right\} 3x_2 = 12,\ \underline{\underline{x_2^* = 4,\ x_1^* = 3,}}\ \text{opt. ZF–Niveau } z^* = -x_1^* + x_2^* = \underline{\underline{1}}$$

b) Gleiches zulässiges Gebiet und gleiche Zielfunktion wie bei a),
Minimierung durch Verschiebung des Zielfunktionsniveaus nach rechts unten



$z = -x_1 + x_2 \longrightarrow -\infty$: Zielfunktion unbeschränkt, Aufgabe unlösbar
(Es gibt zulässige Punkte, aber kein Optimum.)

c) Gleiches zulässiges Gebiet wie bei a),
Nullniveau der Zielfunktion jetzt $-4x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_2 = 2x_1$,
Maximierung des Zielfunktionsniveaus in Richtung links oben



Optimale Lösung auf der Geraden $2x_1 - x_2 = 2$ zwischen den Schnittpunkten $(2,2)$ mit $x_1 = 2$ und $(3,4)$ mit $-x_1 + 2x_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad z^* = -4, \quad \text{Aufgabe mehrdeutig lösbar.}$$

d) Zulässiger Bereich rechts von $x_1 = 2$ und gleichzeitig oberhalb $3x_1 - x_2 = 3$ und unterhalb von $2x_1 - x_2 = 2$ (jeweils einschließlich): leer
$\Longrightarrow$ Aufgabe unlösbar (Es gibt keine zulässigen Punkte.)