Aufgabe 8.5

Ein Unternehmen produziert drei Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3, für deren Herstellung Erzeugnisse E_1 bis E_3 selbst sowie Rohstoffe R_1 bis R_4 gemäß folgender Tabelle benötigt werden:

	Eigenverbrauch an			Verbrauch an				Gewinn
	E_1	E_2	E_3	R_1	R_2	R_3	R_4	
je E_1	1/2	0	1/4	2	4	0	2	2
je E_2	0	0	1/4	1	1	1	0	1
je E_3	1/2	1/2	0	0	3	0	4	3

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn bereits 5 E_1, 8 E_2 und 6 E_3 vertraglich gebunden sind sowie an Rohstoffen 150 Einheiten R_1, 200 Einheiten R_2, 50 Einheiten R_3 und 200 Einheiten R_4 zur Verfügung stehen!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Lösung:

Bezeichnungen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: zu produzierende Erzeugnisse

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$: verkaufbare Erzeugnisse

$\vec{x} - \vec{y}$: Eigenverbrauch

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 50 \\ 200 \end{pmatrix}$: Rohstoffe

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: Gewinn

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$: vertraglich gebundene Erzeugnisse

Zielfunktion: $\vec{c} \cdot \vec{y} = 2y_1 + y_2 + 3y_3 \longrightarrow \max$

Rohstoffe: Aufwandsmatrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} \vec{x} \leq \vec{r}$, d.h.
$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +x_2 & & \leq 150 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 200 \\ & x_2 & & \leq \ \ 50 \\ 2x_1 & & +4x_3 & \leq 200 \end{array}$$

Eigenverbrauch: Aufwandsmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \vec{x} = \vec{x} - \vec{y}$, d.h.
$$\begin{array}{rrrl} \frac{1}{2}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & = x_1 - y_1: \text{ Eigenverbrauch an } E_1 \\ & & \frac{1}{2}x_3 & = x_2 - y_2: \text{ Eigenverbrauch an } E_2 \\ \frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_2 & & = x_3 - y_3: \text{ Eigenverbrauch an } E_3 \end{array}$$

Vertragliche Bindung: $\vec{y} \geq \vec{v}$

Nichtnegativität: Eigenverbrauch darf nicht negativ sein: $\vec{x} - \vec{y} \geq \vec{0}$ ($\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \vec{x} \geq \vec{0}$).
(Daraus folgt auch $\vec{x} \geq \vec{y} \geq \vec{v} \geq \vec{0}$.)

Modell: $$\boxed{\begin{array}{ccc} \vec{c}\cdot\vec{y} & \longrightarrow & \max \\ \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\vec{x} & \leq & \vec{r} \\ \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{x} & = & \vec{x}-\vec{y} \\ \multicolumn{3}{c}{\vec{y}\geq\vec{v},\ \ \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{x}\geq\vec{0}} \end{array}}$$

Nachteil dieses Modells: Auftreten der voneinander abhängigen Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$

$\vec{y}$ eliminierbar: $\vec{y}=\vec{x}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{x}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\vec{x} \implies$ $$\boxed{\begin{array}{ccc} \vec{c}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\vec{x} & \longrightarrow & \max \\ \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\vec{x} & \leq & \vec{r} \\ \multicolumn{3}{c}{(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\vec{x}\geq\vec{v},\ \ \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{x}\geq\vec{0}} \end{array}}$$

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&0&1/2\\1/4&1/4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&-1/2\\-1/4&-1/4&1\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\vec{x}=\vec{c}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\vec{x}=(2\ \ 1\ \ 3)\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&-1/2\\-1/4&-1/4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{3}{2}x_3\longrightarrow\max,$$

äquivalent: $x_1+x_2+6x_3\longrightarrow\max$

Somit ergibt sich folgendes Modell:

$$\begin{array}{c|rrrcr}
\text{ZF} & x_1 & +x_2 & +6x_3 & \longrightarrow & \max \\ \hline
 & 2x_1 & +\ x_2 & & \leq & 150 \\
\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\vec{x}\leq\vec{r} & 4x_1 & +\ x_2 & +3x_3 & \leq & 200 \\
 & & x_2 & & \leq & 50 \\
 & 2x_1 & & +4x_3 & \leq & 200 \\ \hline
 & \frac{1}{2}x_1 & & -\frac{1}{2}x_3 & \geq & 5 \\
(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\vec{x}\geq\vec{v} & & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & \geq & 8 \\
 & -\frac{1}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_2 & +x_3 & \geq & 6 \\ \hline
 & \frac{1}{2}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & \geq & 0 \\
\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{x}\geq\vec{0} & & & \frac{1}{2}x_3 & \geq & 0 \\
 & \frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_2 & & \geq & 0
\end{array}$$

Die letzten 6 Zeilen könnten zur Vereinfachung noch mit 2 bzw. 4 multipliziert werden. Um den maximalen Gewinn zu erhalten, muss der optimale Zielfunktionswert am Ende durch 4 dividiert werden.