Aufgabe 7.129

Bei einem spatförmigen Behälter werde die Grundfläche ausgehend vom Punkt $A(-2,0,1)$ durch die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ aufgespannt, die ihr gegenüberliegende Fläche sei offen. Der dritte den Spat von A ausgehend aufspannende Vektor sei $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$. Längeneinheit ist der Meter.

a) Bestimmen Sie die Eckpunkte des Spates!
b) Berechnen Sie das Volumen des Behälters!
c) Welche Masse hat der Behälter, wenn für seinen Bau Material der Dichte von $5\,\mathrm{kg/m^2}$ verwendet wurde?
d) Der Behälter befinde sich in einer Flüssigkeitsströmung. Wie lange dauert es, bis er gefüllt ist, wenn die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bzw. $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt?

Lösung:

a) Ortsvektoren der Eckpunkte sind für die Grundfläche $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA}+\vec{a}$, $\overrightarrow{OA}+\vec{a}+\vec{b}$ und $\overrightarrow{OA}+\vec{b}$ und für die Deckfläche $\overrightarrow{OA}+\vec{c}$, $\overrightarrow{OA}+\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{OA}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ und $\overrightarrow{OA}+\vec{b}+\vec{c}$.

Also sind die Punkte $(-2,0,1)$, $(-1,2,3)$, $(1,5,9)$ und $(0,3,7)$ Eckpunkte der Grundfläche und die Punkte $(-1,4,9)$, $(0,6,11)$, $(2,9,17)$ und $(1,7,15)$ Eckpunkte der Deckfläche.

b) $$V=\left|\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\right|=\left|\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&4\\2&6&8\end{vmatrix}\right|=|-10|=10\ \left[\mathrm{m}^3\right]$$

c) Oberfläche (ohne Deckfläche!):

$$O=\|\vec{a}\times\vec{b}\|+2\|\vec{a}\times\vec{c}\|+2\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&2\\2&3&6\end{vmatrix}\right\|+2\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&2\\1&4&8\end{vmatrix}\right\|+2\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&6\\1&4&8\end{vmatrix}\right\|$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}6\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\|+2\left\|\begin{pmatrix}8\\-6\\2\end{pmatrix}\right\|+2\left\|\begin{pmatrix}0\\-10\\5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{41}+2\sqrt{104}+2\sqrt{125}\approx 49.16\ \left[\mathrm{m}^2\right]$$

$$m=O\cdot\rho\approx 49.16\,\mathrm{m}^2\cdot 5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}=245.8\,\mathrm{kg}$$

d) Der Fluss mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_i$ durch die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Fläche beträgt $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{v}_i\right)$.

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{v}_1\right)=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&3&-3\\2&6&-1\end{vmatrix}=37\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right],\quad \left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{v}_2\right)=\begin{vmatrix}1&2&-5\\2&3&3\\2&6&1\end{vmatrix}=-37\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$$

Zu entscheiden ist nun noch, in welchem der Fälle die Strömung durch die offene Deckfläche in den Behälter hinein erfolgt und in welchem sie auf die geschlossene Grundfläche trifft. Von der Deckfläche aus befindet sich der Behälter in Richtung $-\vec{c}$. Damit die Strömung in den Behälter hinein erfolgt, muss das Vektorsystem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_i$ die gleiche Orientierung haben wie das System $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$.

Es gilt $\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & -\vec{c} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 10 > 0$, also ist $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}$ genauso wie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_1$ ein Rechtssystem (wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Richtung des Daumens bzw. Zeigefingers der rechten Hand zeigen, zeigen sowohl $-\vec{c}$ als auch $\vec{v}_1$ in Richtung des rechten Mittelfingers), während $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}_2$ ein Linkssystem (desgl. für linke Hand bzw. bei rechter Hand zeigt $\vec{v}_2$ entgegengesetzt zum rechten Mittelfinger) bildet.

Also erfolgt mit $\vec{v}_1$ die Strömung in den Behälter hinein, er ist nach $\dfrac{10\,\mathrm{m}^3}{37\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}} = \dfrac{10}{37}\,\mathrm{s} \approx 0.27\,\mathrm{s}$ vollständig gefüllt, während er bei der Strömung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ überhaupt nicht gefüllt wird.