

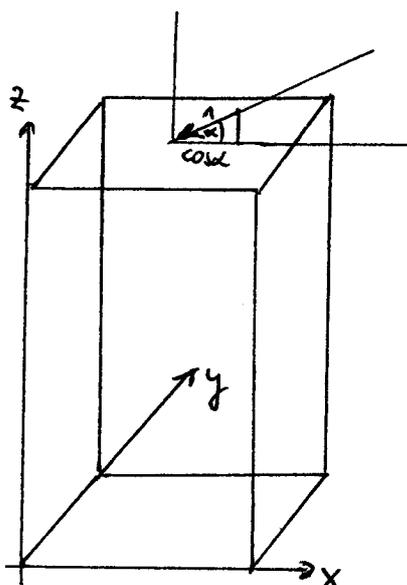
Aufgabe 7.125

In einer Flüssigkeitsströmung befindet sich ein oben offener quaderförmiger Behälter mit einer Grundfläche von $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ und einer Höhe von 50 cm . Die Fließgeschwindigkeit beträgt $0,5 \text{ m/s}$, die Fließrichtung bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 30° und ist orthogonal zur kurzen Seite der Grundfläche.

- Legen Sie ein geeignetes Koordinatensystem fest und geben Sie in diesem die Strömung vektoriell an!
- Wie lange dauert es, bis der Behälter vollständig gefüllt ist?

Lösung:

a)



Strömungsrichtung gegenüber

x -Achse $\alpha = 30^\circ$

y -Achse 90°

z -Achse $90^\circ - \alpha = 60^\circ$

(z -Achse ist orthogonal zur Grundfläche.)

Einheitsvektor in Strömungsrichtung

$$\begin{pmatrix} -\cos 30^\circ \\ \cos 90^\circ \\ -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wählen Einheit dm

(zweckmäßig wegen Volumenangaben in Liter):

$$\text{Geschwindigkeit } 5 \frac{\text{dm}}{\text{s}}, \text{ vektoriell } -2.5 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{dm}}{\text{s}}$$

- b) Fluss durch von \vec{a} und \vec{b} aufgespanntes Parallelogramm mit Geschwindigkeit \vec{v} ist Spatprodukt

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{v}) = a_1 b_2 v_3 + a_2 b_3 v_1 + a_3 b_1 v_2 - a_3 b_2 v_1 - a_1 b_3 v_2 - a_2 b_1 v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

(Durch das Spatprodukt wird nur die zur Parallelogramm- (hier konkret Rechteck-)Fläche orthogonale Komponente der Geschwindigkeit berücksichtigt. Die Fläche von 6 dm^2 wird mit 5 dm/s durchflossen. Die Strömungsrichtung und die auf der Rechteckfläche senkrecht stehende Richtung bilden einen Winkel von 60° , $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, so dass der Durchfluss $6 \text{ dm}^2 \cdot 5 \frac{\text{dm}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{2} = 15 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$ beträgt.)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dm}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dm}, (\vec{a}\vec{b}\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} (-2.5) \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2.5) \frac{1}{\text{s}} = -15 \frac{1}{\text{s}}$$

Es fließen 15 Liter pro Sekunde „nach unten“.

Das Behältervolumen beträgt $3 \cdot 2 \cdot 5 \text{ dm}^3 = 30 \text{ l}$, so dass der Behälter nach $\frac{30 \text{ l}}{15 \frac{\text{l}}{\text{s}}} = 2 \text{ s}$ vollständig gefüllt ist.

Bemerkung: Natürlich könnte die Strömung auch von „links oben“ (statt wie hier betrachtet von „rechts oben“) kommen. Die Richtung ergibt sich aus der Aufgabe nicht eindeutig, das Koordinatensystem kann aber ohnehin in geeigneter Weise selbst festgelegt werden. Auf

das Ergebnis hat das keinen Einfluss. Das ist anschaulich klar, rechnerisch ergibt es sich daraus, dass eine Änderung des Vorzeichens der ersten Komponente der Strömungsrichtung im konkreten Fall das Spatprodukt nicht verändert.