

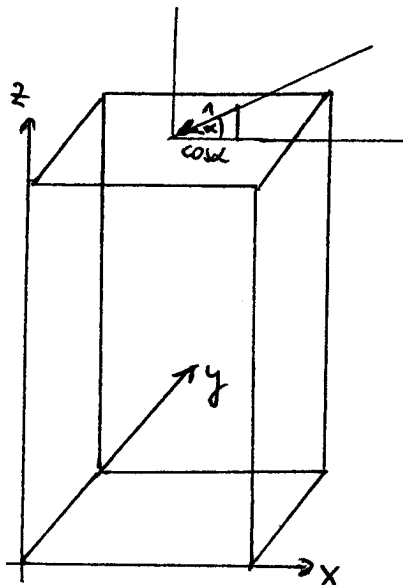
### Aufgabe 7.125

In einer Flüssigkeitsströmung befindet sich ein oben offener quaderförmiger Behälter mit einer Grundfläche von  $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  und einer Höhe von  $50 \text{ cm}$ . Die Fließgeschwindigkeit beträgt  $0,5 \text{ m/s}$ , die Fließrichtung bildet mit der Grundfläche einen Winkel von  $30^\circ$  und ist orthogonal zur kurzen Seite der Grundfläche.

- Legen Sie ein geeignetes Koordinatensystem fest und geben Sie in diesem die Strömung vektoriell an!
- Wie lange dauert es, bis der Behälter vollständig gefüllt ist?

### Lösung:

a)



Strömungsrichtung gegenüber

$x$ -Achse  $\alpha = 30^\circ$

$y$ -Achse  $90^\circ$

$z$ -Achse  $90^\circ - \alpha = 60^\circ$

( $z$ -Achse ist orthogonal zur Grundfläche.)

Einheitsvektor in Strömungsrichtung

$$\begin{pmatrix} -\cos 30^\circ \\ \cos 90^\circ \\ -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wählen Einheit  $\text{dm}$

(zweckmäßig wegen Volumenangaben in Liter):

Geschwindigkeit  $5 \frac{\text{dm}}{\text{s}}$ , vektoriell  $-2.5 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{dm}}{\text{s}}$

- b) Fluss durch von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespanntes Parallelogramm mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist Spatprodukt

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{v}) = a_1b_2v_3 + a_2b_3v_1 + a_3b_1v_2 - a_3b_2v_1 - a_1b_3v_2 - a_2b_1v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

(Durch das Spatprodukt wird nur die zur Parallelogramm- (hier konkret Rechteck-)Fläche orthogonale Komponente der Geschwindigkeit berücksichtigt. Die Fläche von  $6 \text{ dm}^2$  wird mit  $5 \text{ dm/s}$  durchflossen. Die Strömungsrichtung und die auf der Rechteckfläche senkrecht stehende Richtung bilden einen Winkel von  $60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , so dass der Durchfluss  $6 \text{ dm}^2 \cdot 5 \frac{\text{dm}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{2} = 15 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$  beträgt.)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dm}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dm}, \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} (-2.5) \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2.5) \frac{1}{\text{s}} = -15 \frac{1}{\text{s}}$$

Es fließen  $15$  Liter pro Sekunde „nach unten“.

Das Behältervolumen beträgt  $3 \cdot 2 \cdot 5 \text{ dm}^3 = 30 \text{ l}$ , so dass der Behälter nach  $\frac{30 \text{ l}}{15 \frac{\text{l}}{\text{s}}} = 2 \text{ s}$  vollständig gefüllt ist.

**Bemerkung:** Natürlich könnte die Strömung auch von „links oben“ (statt wie hier betrachtet von „rechts oben“) kommen. Die Richtung ergibt sich aus der Aufgabe nicht eindeutig, das Koordinatensystem kann aber ohnehin in geeigneter Weise selbst festgelegt werden. Auf

das Ergebnis hat das keinen Einfluss. Das ist anschaulich klar, rechnerisch ergibt es sich daraus, dass eine Änderung des Vorzeichens der ersten Komponente der Strömungsrichtung im konkreten Fall das Spatprodukt nicht verändert.