

Aufgabe 7.124

Ein oben offener quaderförmiger Behälter mit einer Grundfläche von $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ und einer Höhe von 50 cm werde durch eine Flüssigkeit senkrecht von oben mit einer Geschwindigkeit von $0,5 \text{ m/s}$ gefüllt. Wie lange dauert es, bis der Behälter vollständig gefüllt ist? Wie ließe sich die Berechnung mit dem Spatprodukt darstellen?

Lösung:

Die Öffnung hat eine Fläche von $3 \cdot 2 \text{ dm}^2$, der Durchfluss beträgt somit $6 \text{ dm}^2 \cdot 5 \frac{\text{dm}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = 30 \frac{1}{\text{s}}$. Da das Behältervolumen $3 \cdot 2 \cdot 5 \text{ dm}^3 = 30 \text{ l}$ beträgt, ist der Behälter nach 1 s voll gefüllt.

Die Einflussituation lässt sich so beschreiben, dass das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dm}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dm}$ aufgespannte Parallelogramm von einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \frac{\text{dm}}{\text{s}}$ (da senkrecht von oben) durchflossen wird.

Der Durchfluss ist dann $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \frac{1}{\text{s}} = -30 \frac{1}{\text{s}}$. Pro Sekunde fließen also 30 Liter „nach unten“.