Aufgabe 7.121

Ein Prisma ist „ein geometrischer Körper, der durch Parallelverschiebung einer ebenen Fläche (der Grundfläche) entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht.“ (Wikipedia bis 2006) Die Grundfläche sei das Dreieck ABC, die dazu parallele Deckfläche DEF. Gegeben seien die Punkte $A=(1,0,1)$, $B=(2,1,3)$, $C=(3,2,1)$ und $D=(5,6,6)$.

a) Bestimmen Sie die Punkte E und F !
b) Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche, die Höhe und das Volumen des Prismas!

Lösung:

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DF},\quad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad E=(6,7,8),\ F=(7,8,6)$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

Grundfläche (Fläche des Dreiecks ABC):

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}4\sqrt{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

Höhe: Abstand von D zur Ebene durch ABC, letztere hat den bereits ausgerechneten Stellungsvektor $\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, ihre Gleichung lautet also

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix} = -x+1+y=0,\ \text{d.h.}\ \ x-y=1.$$

Das Lot von D auf die Ebene hat die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, es schneidet die Ebene bei $x-y=5-t-6-t=1$, $-2=2t$, $t=-1$. Seine Länge, das ist die Höhe, beträgt $\left\|-\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$.

Volumen $=$ Grundfläche $\cdot$ Höhe $= 2\sqrt{2}\,\sqrt{2} = \underline{\underline{4}}$

oder

Hälfte des Volumens des von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannten Spats, also

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 6\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|10+24-16-10\right| = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$