Aufgabe 7.118

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{b} \times \vec{c}$ sowie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelepipeds)!

Lösung:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$V = \left| \left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right) \right| = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = |-12-9+14| = |-7| = \underline{\underline{7}}$$

oder:

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - (-5) \cdot (-3) \cdot 1 - (-2) \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 3 + 20 - 27 - 6 - 15 + 18 = -7, \quad V = \left| \left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right) \right| = \underline{\underline{7}}$$

(Die Determinante wird auch in Aufgabe 6.180c) berechnet.)