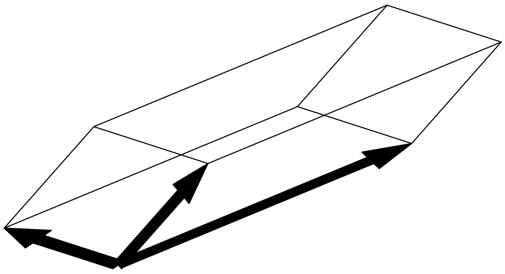
**Aufgabe 7.116**

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelepipeds)!

**Lösung:**

Räumliches Analogon des Parallelogramms ist das Parallelepiped (Spat).



Das Volumen des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats ist gleich dem Betrag des Spatproduktes

$$V = \left|\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\right| = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right| = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right|, \quad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$ (s. Aufgabe 7.40)

$$V = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = |-13 - 36 + 14| = |-35| = \underline{\underline{35}}$$

**oder:** $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, also

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 \cdot 2 - (-2) \cdot 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= -8 - 2 - 30 + 16 - 6 - 5 = -35, \quad V = \left|\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\right| = \underline{\underline{35}}$$