Aufgabe 7.114

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\13\\-30\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}20\\4\\-9\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\9\\20\end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonale Richtung!
b) Projizieren Sie die Vektoren $\vec{b}-\vec{a}$ und $\vec{c}-\vec{a}$ auf den bei a) ermittelten Vektor!
c) Ermitteln Sie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{b}+t\vec{v}$ sowie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{c}+t\vec{v}$!
d) Welches der bei c) betrachteten Geradenpaare liegt in einer Ebene? Geben Sie deren Gleichung in parameterfreier Form an!

Lösung:

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\9\\20\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&0\\-3&9&20\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-60\\30\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$.

b) Projektion von $\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\2\\-41\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}-6\\2\\-41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=\dfrac{-147}{49}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$

Projektion von $\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\-7\\-20\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}9\\-7\\-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=\vec{0}$

c) Der Abstand ist die Länge der Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors der beiden Geraden, also z.B. von $\vec{b}-\vec{a}$ bzw. von $\vec{c}-\vec{a}$ auf die bei a) ermittelte Richtung des gemeinsamen Lots. Mit dem Ergebnis von b) erhält man

als Abstand zwischen $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{b}+t\vec{v}$: $\left\|-3\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\right\|=3\sqrt{49}=21$ und

als Abstand zwischen $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{c}+t\vec{v}$: $\left\|\vec{0}\right\|=0$.

d) Das erste Geradenpaar ist windschief, das zweite schneidet sich. Also liegt das zweite in einer Ebene. Der Normalenvektor dieser Ebene wurde schon bei a) errechnet, als Punkt der Ebene kann jeder Punkt der beiden Geraden, z.B. also $(11,11,11)$ verwendet werden. Die parameterfreie Ebenengleichung lautet somit

$$\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}=2x-6y+3z+11=0,$$
$$-2x+6y-3z=11.$$