Aufgabe 7.113

Bestimmen Sie den Abstand der Gerade durch die Punkte $(15,-3,-14)$ und $(17,-2,-16)$ von den drei im Folgenden genannten Geraden! In welchen Punkten der Geraden wird der Abstand realisiert?

a) Gerade $z=-x+1$ in der x-z-Ebene,
b) x-Achse,
c) Schnittgerade der Ebenen $x=2y$ und $z=-2y$.

Lösung:

Die Gerade g durch die Punkte $(15,-3,-14)$ und $(17,-2,-16)$ hat die Gleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}+s\left(\begin{pmatrix}17\\-2\\-16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Die bei a) gegebene Gerade h_a liegt in der x-z-Ebene, also ist $y=0$. Wählt man $t=x$ als Parameter, so ist $z=-t+1$, die Geradengleichung lautet also $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Die Geraden g und h_a sind offensichtlich nicht parallel, ihr gemeinsames Lot hat die Richtung

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-2\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\hat{=}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Abstand ist die Länge der Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors der beiden Geraden, also z.B. von $\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-3\\-15\end{pmatrix}$ auf die Richtung des gemeinsamen Lotes. Die Projektion des angegebenen Vektors ist

$$\frac{\begin{pmatrix}15\\-3\\-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Also ist der Abstand 0, die Geraden g und h_a schneiden sich. Der Abstand 0 wird im Schnittpunkt realisiert:

$$\begin{aligned}15+2s&=t && \Longrightarrow t=21\\-3+s&=0 && \Longrightarrow s=3\\-14-2s&=1-t && -14-2\cdot3=1-21,\ \text{stimmt.}\end{aligned}$$

Ortsvektor des Schnittpunkts ist somit $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+21\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\0\\-20\end{pmatrix}$.

b) Die x-Achse hat die Gleichung $\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Auch sie ist offensichtlich nicht parallel zu g, das gemeinsame Lot hat die Richtung

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\hat{=}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Abstand ist dann die Länge der Projektion z.B. von $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix}$ auf die Richtung des gemeinsamen Lotes. Diese Projektion ist $\dfrac{\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{-20}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Abstand beträgt somit $\left\| -4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{5} \approx 8.94$, die Geraden sind windschief.

Sind s und t die Parameter der Lotfußpunkte in den Geradengleichungen, so gilt
$\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

s und t ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems $\begin{array}{rcr} 2s-t &=& -15 \\ s &=& -5 \\ -2s &=& 10 \end{array}$ zu $s=-5$ und $t=5$.

Der Abstand wird also in den Punkten $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf g und $5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der x-Achse realisiert.

c) Da auf der Gerade h_c die Gleichungen $x=2y$ und $z=-2y$ gleichzeitig erfüllt sind, erhält man mit dem Parameter $t=y$ als Geradengleichung $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Geraden h_c und g sind somit parallel. Ihr Abstand ist die Länge des Lotes von einem beliebigen Punkt der Gerade h_c, also z.B. vom Koordinatenursprung, auf die Gerade g. Den Lotfußpunkt kann man bestimmen, indem man den Verbindungsvektor zwischen einem Punkt auf g, z.B. $(15, -3, -14)$, und dem Koordinatenursprung auf g projiziert:

$$\frac{\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-55}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Fußpunkt des Lotes vom Koordinatenursprung auf g ist also $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} - \dfrac{55}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/9 \\ -82/9 \\ -16/9 \end{pmatrix}$.

Da es sich um das Lot vom Koordinatenursprung handelt ist der Ortsvektor des Lotfußpunktes zugleich das Lot. Der Abstand beträgt somit $\left\| \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 25 \\ -82 \\ -16 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{\sqrt{7605}}{9} = \dfrac{\sqrt{845}}{3} \approx 9.69$.

Realisiert wird der Abstand in jedem Paar von Punkten $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in h_c,\; t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25/9 \\ -82/9 \\ -16/9 \end{pmatrix} \in g$.