Aufgabe 7.111

Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade, die die Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im rechten Winkel schneidet und ermitteln Sie den Abstand der beiden gegebenen Geraden!

Lösung:

Der Richtungsvektor der gesuchten Gerade ist orthogonal zu den Richtungsvektoren der beiden gegebenen Geraden, also $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die gesuchte Gerade schneidet die erste Gerade in einem Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit noch unbekanntem r, ihre Gleichung lautet also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit noch zu bestimmendem r.

In ihrem Schnittpunkt mit der zweiten Gerade gilt folglich

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcl} -r+2s-t &=& 0-2=-2 \\ 2r+\ s \quad &=& 10-0=\ 10 \\ -2s-t &=& -5-1=-6 \end{array}.$$

Aus der 2. Zeile folgt $r=5-\frac{s}{2}$, aus der 3. Zeile folgt $t=6-2s$. Einsetzen in die 1. Zeile ergibt $-5+\frac{s}{2}+2s-6+2s=-2,\ \ \frac{9s}{2}=9,\ \ s=2,\ \ r=4,\ \ t=2.$

Mit $r=4$ ergibt sich als Gleichung der gesuchten Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bei der Gerade handelt es sich um das gemeinsame Lot der gegebenen windschiefen Geraden, es schneidet die erste Gerade in dem gerade angegebenen Punkt $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, die zweite Gerade wegen $t=2$ im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$. Der Abstand der Geraden ist die Länge des Lotes, also $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{9} = 6.$

Wäre es nur darum gegangen, den Abstand der windschiefen Geraden zu ermitteln, so hätte es gereicht, den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf die Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ des gemeinsamen Lots zu projizieren. Als Projektion ergibt sich $\dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{18}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Der Abstand beträgt folglich $\left\| 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{9} = 6$.

Man kann auch die Formel für den Abstand windschiefer Geraden verwenden:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 10-0 \\ -5-1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{18}{3} = 6.$$