Aufgabe 7.108

a) Zeigen Sie, dass die Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zueinander windschief sind!

b) Ermitteln Sie die Richtung ihres gemeinsamen Lotes!

c) Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die die Gerade g_1 und das gemeinsame Lot enthält!

d) Wo schneidet diese Ebene die Gerade g_2 ?

e) Wo beginnt das Lot auf der Geraden g_1 ?

f) Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden voneinander?

g) Ermitteln Sie zwei zueinander parallele Ebenen, von denen die eine die Gerade g_1 und die andere die Gerade g_2 enthält! Welchen Abstand haben diese Ebenen voneinander?

Lösung:

a) windschief: weder parallel noch Schnitt

Die Geraden sind offensichtlich nicht parallel. Wir suchen den evtl. Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2s &= -5 + t \\ 2 + \ \ s &= 13 & \implies \quad & s = 11 \\ 2s &= 16 + 4t & \implies \quad & 22 = 16 + 4t, \ \ t = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Für diese Parameterwerte ergibt sich als x–Komponenete $1 + 2 \cdot 11 = 23 \neq -5 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$. Das ist ein Widerspruch, also liegt kein Schnittpunkt vor.

oder:

Volumen des Spates aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ ist $\left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 11 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix} \right| =$ $|22 - 24 - 88 - 16| \neq 0$, also windschief.

b) Das gemeinsame Lot steht auf beiden Geraden senkrecht, seine Richtung ist also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0, \quad 11x + 10y - 16z = 11 \cdot 1 + 10 \cdot 2 - 16 \cdot 0, \quad 11x + 10y - 16z = 31$$

d) Schnitt von $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $11x + 10y - 16z = 31$:

$11(-5+s)+10\cdot 13-16(16+4s)=31,\;\; -55+130-256+11s-64s=31,\;\; -212=53s,\;\; s=-4,$

d.h. Schnitt in $\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Zur Ebene $11x + 10y - 16z = 31$ gehören die Gerade g_1 und das gemeinsame Lot einschließlich des Lotfußpunktes auf g_2. Gesucht ist also der innerhalb dieser Ebene liegende Schnitt von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{lll} 1+2s = -9+4t & & \\ 2+\;\; s = 13-6t & & \Longrightarrow \quad 2+s = 13+12s,\;\; -11s = 11,\;\; s=-1,\;\; t=2 \\ \quad 2s = -t & \Longrightarrow \quad t = -2s & \end{array}$$

Für die aus der 2. und 3. Zeile ermittelten Paramater s und t ist auch die 1. Zeile erfüllt: $1+2(-1) = -1 = -9+4\cdot 2$, der Schnittpunkt des gemeinsamen Lotes mit der Gerade g_1 ist somit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

f) Der Abstand ist die Länge des gemeinsamen Lotes, also $\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$ $= 2\sqrt{53} \approx 14{,}56$.

Dies ergibt sich auch mit der Formel für den Abstand windschiefer Geraden:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5-1 \\ 13-2 \\ 16-0 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 16 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{106}{\sqrt{53}} = 2\sqrt{53}.$$

g) Der (gleiche) Stellungsvektor der Ebenen muss zu g_1 und g_2 orthogonal sein, ist also $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ebene, die g_1 enthält: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0, \quad 4x - 6y - z = -8,$

Ebene, die g_2 enthält: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+\;\;5 \\ y-13 \\ z-16 \end{pmatrix} = 0, \quad 4x - 6y - z = -114.$

Der Abstand dieser Ebenen ist gleich dem Abstand von g_1 und g_2, also $2\sqrt{53}$.