

Aufgabe 7.107

In einem kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten x , y und z werden die z -Achse sowie die Gerade durch die Punkte $(-1, 7, 6)$ und $(-5, 10, 7)$ betrachtet.

- Ermitteln Sie die zu diesen beiden Geraden senkrechte Richtung (Richtung des gemeinsamen Lotes)!
- Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden durch Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors auf die Richtung des gemeinsamen Lotes!
- Bestimmen Sie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes durch Lösung eines Gleichungssystems!

Lösung:

a) Geradengleichungen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtung des gemeinsamen Lotes ist $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Die Projektion von \vec{x} auf \vec{a} ist $\frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$. Hier ist z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu

projizieren, man erhält als gemeinsames Lot $\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{25}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Abstand ist die Länge des gemeinsamen Lotes, also $\left(\frac{|\vec{x} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|} \right) \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

- c) Das gemeinsame Lot ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Lotfußpunkten. Haben diese in den gegebenen Geradengleichungen die Parameter s bzw. t , so muss also gelten

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Differenz ist dabei in der gleichen Richtung gebildet wie der Verbindungsvektor bei b).

Zu lösen ist damit das Gleichungssystem $s \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die 1. und die 2. Zeile sind äquivalent zu $s = -1$, aus der 3. Zeile erhält man dann $t = s + 6 = 5$.

Lotfußpunkte sind also $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.