Aufgabe 7.105

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der orthogonalen Projektion des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(24,16,14)$ in die Ebene $3x+2y+z=6$!

Lösung:

Da der Flächeninhalt des Dreiecks die Hälfte des Betrages des Kreuzproduktes von zwei seiner Seitenvektoren ist, reicht es, zwei Seitenvektoren des gegebenen Dreiecks in die Ebene $3x+2y+z=6$ zu projizieren.

Hierzu werden die Vektoren zunächst auf die Richtung des Normalenvektor der Ebene projiziert, die Differenz zwischen dem Vektor und seiner Projektion auf die Normalenrichtung ist seine Projektion in die Ebene.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}: \text{ Projektion auf Normalenrichtung } \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}: \frac{\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

also liegt der Seitenvektor $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ in der Ebene $3x+2y+z=6$.

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}24\\16\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\16\\14\end{pmatrix}:$$

Projektion auf Normalenrichtung $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}22\\16\\14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\dfrac{112}{14}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\16\\8\end{pmatrix}$,

Projektion in die Ebene $3x+2y+z=6$: $\begin{pmatrix}22\\16\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}24\\16\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$.

$$F=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&3&0\\-2&0&6\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}18\\12\\6\end{pmatrix}\right\|=3\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=3\sqrt{14}\approx\underline{\underline{11.22}}.$$

(Man kann auch zunächst die gegebenen Punkte in die Ebene $3x+2y+z=6$ projizieren. Die Punkte $(2,0,0)$ und $(0,3,0)$ liegen offensichtlich bereits in der Ebene, für $(24,16,14)$ lautet die Geradengleichung des Lots $\vec{x}=\begin{pmatrix}24\\16\\14\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Das Einsetzen in die Ebenengleichung liefert $t=-8$ als Parameter für den Lotfußpunkt, dieser ist also $(0,0,6)$. Also ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ und $(0,0,6)$ zu bestimmen, siehe oben.)