Aufgabe 7.104

In welchen Punkten schneiden folgende Geraden die Ebene durch die Punkte $(1,1,0)$, $(2,3,3)$ und $(1,2,4)$:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$?

Welcher Zusammenhang besteht zur Lösung von Aufgabe 6.7a)?

Lösung:

Für die Schnittpunktbestimmung ist es zweckmäßig, die Ebenengleichung in parameterfreier Form zu verwenden, denn dann kann man die Geradengleichung mit einem Parameter in die parameterfreie Ebenengleichung einsetzen. Beim Gleichsetzen der Parameterdarstellungen von Gerade und Ebene wäre hingegen ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 zu bestimmenden Parametern zu lösen.

Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-1 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{n}(\vec{x}-\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0, \quad 5x-4y+z = 5\cdot 1 - 4\cdot 1 + 1\cdot 0, \quad 5x-4y+z=1$

a) $5(5+2r)-4(8+3r)+(6+r)=1,\ 25+10r-32-12r+6+r=1,\ r=-2$

Die Gerade schneidet die Ebene also in dem einen Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) $5(5+3r)-4(8+8r)+(6+17r)=1,\ 25+15r-32-32r+6+17r=1,\ \ -1=1.$

Das ist ein Widerspruch, also gibt es keinen Schnittpunkt. Die Gerade ist parallel zu der Ebene.

c) $5(2+3r)-4(4+8r)+(7+17r)=1,\ 10+15r-16-32r+7+17r=1,\ \ 1=1.$

Das ist für beliebige r erfüllt. Also liegt die Gerade in der Ebene.

Bei a) ist der Richtungsvektor der Gerade nach dem Ergebnis von Aufgabe 6.7a) linear unabhängig von den Richtungsvektoren der Ebene. Die Geradenrichtung liegt nicht in der Ebene, so dass die Gerade die Ebene in einem Punkt schneidet.

Bei b) und c) hingegen ist der Richtungsvektor der Gerade Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene und liegt somit in der Ebene. Durch den Ortsvektor wird eine Parallelverschiebung der Gerade bewirkt, so dass die Gerade in der Ebene liegen kann (Fall c)) oder (echt) parallel zu der Ebene ist (Fall b)).