Aufgabe 7.103

Gegeben seien die Ebenen E_1: $x+2y+3z=6$, E_2: $2x+4y+6z=6$, E_3: $2x+4y+6z=12$ und E_4: $2x-4y+6z=12$. Bestimmen Sie die Lagebeziehungen dieser Ebenen untereinander, ermitteln Sie den Abstand und ggf. die Schnittgerade und den Schnittwinkel!

Lösung:

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben denselben Stellungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, sind also parallel. Die Gleichung von E_3 geht durch Multiplikation der Gleichung von E_1 mit 2 aus dieser hervor, so dass E_1 und E_3 identisch sind, ihr Abstand ist 0.

Zur Bestimmung des Abstandes von $E_1 \equiv E_3$ von E_2 reicht es, die Länge des Lotes von einem Punkt aus E_2 $\big($z.B. $(3,0,0)\big)$ auf E_1 zu bestimmen. Die Geradengleichung dieses Lotes lautet $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, im Lotfußpunkt gilt $3+t+2\cdot 2t+3\cdot 3t=3+14t=6$, d.h. $t=\frac{3}{14}$. Länge des Lotes und damit Abstand zwischen E_2 und $E_1\equiv E_3$ damit $\left|\frac{3}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{3}{\sqrt{14}}\approx 0.802$.

Die Ebene E_4 ist dagegen offensichtlich nicht zu den Ebenen $E_1\equiv E_3$ und E_2 parallel, die Ebenen schneiden sich und ihr Abstand ist 0. Da $E_1\equiv E_3$ und E_2 parallel sind, sind die Schnittwinkel mit E_4 gleich und gleich dem Schnittwinkel der Stellungsvektoren $\arccos\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\rangle}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right|}=$ $\arccos\frac{6}{14}\approx 64.62^\circ$.

Bleibt noch die Bestimmung der Schnittgeraden von $E_3\equiv E_1$ bzw. E_2 mit E_4:

$$\begin{aligned}2x+4y+6z&=12 \quad |+\\ 2x-4y+6z&=12 \quad |+\\ 4x +12z&=24\end{aligned}$$

$x=6-3z$,

$y=\frac{1}{4}(12-2x-6z)=\frac{1}{4}(12-12+6z-6z)=0$
oder y sofort aus Subtraktion der beiden Gleichungen bestimmen

Schnittgerade von $E_1\equiv E_3$ und E_4:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}2x+4y+6z&=6 \quad |+\\ 2x-4y+6z&=12 \quad |+\\ 4x +12z&=18\end{aligned}$$

$x=\frac{9}{2}-3z$,

$y=\frac{1}{4}(6-2x-6z)=\frac{1}{4}(6-9+6z-6z)=-\frac{3}{4}$
oder y sofort aus Subtraktion der beiden Gleichungen bestimmen

Schnittgerade von E_2 und E_4:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}9/2\\-3/4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich auch als Kreuzprodukt der Stellungsvektoren der beiden Ebenen: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\1&-2&3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\-4\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Allerdings muss dann jeweils noch ein gemeinsamer Punkt der beiden Ebenen bestimmt werden.