Aufgabe 7.101

Untersuchen Sie die Lagebeziehungen der Ebenen $x+2y+3z=4\cdot 10^{120}$, $-x+4y+2z=10^{122}$ und $8x-2y+az=b+2\cdot 10^{121}$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b ! (Die Gleichung der ggf. existierenden Schnittmenge der 3 Ebenen muss nicht angegeben werden.)

Lösung:

Zu untersuchen sind die Lösbarkeitseigenschaften des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{r} x+2y+3z=4\cdot 10^{120} \\ -x+4y+2z=10^{122} \\ 8x-2y+az=b+2\cdot 10^{121} \end{array} .$$

Dieses ist eindeutig lösbar genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist, also für $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 8 & -2 & a \end{vmatrix} = 4a+32+6-96+2a+4 = 6a-54 \neq 0$, d.h. $a \neq 9$.

Somit schneiden sich die 3 Ebenen für $a\neq 9$ in einem Punkt.

Im Falle $a=9$ werden nun Rangbetrachtungen ausgeführt, hierzu werden die ersten beiden Spalten der Koeffizientenmatrix getauscht:

$$\begin{array}{rrr|l}
1 & 2 & 3 & 4\cdot 10^{120} \\
-1 & 4 & 2 & 10^{122} \\
8 & -2 & 9 & b+2\cdot 10^{121} \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4\cdot 10^{120} \\
0 & 6 & 5 & 10^{122}+4\cdot 10^{120} \\
0 & -18 & -15 & b+20\cdot 10^{120}-32\cdot 10^{120} \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4\cdot 10^{120} \\
0 & 6 & 5 & 10^{122}+4\cdot 10^{120} \\
0 & 0 & 0 & b-12\cdot 10^{120}+3\cdot 10^{122}+12\cdot 10^{120} \\
 & & & = b+3\cdot 10^{122}
\end{array}$$

Im Falle $a=9$, $b=-3\cdot 10^{122}$ sind die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix beide gleich 2, so dass das Gleichungssystem lösbar mit $3-2=1$ frei wählbarem Parameter ist: Die 3 Ebenen schneiden sich in einer Gerade.

Im Falle $a=9$, $b\neq -3\cdot 10^{122}$ ist der Koeffizientenmatrix 2, der der erweiterten Koeffizientenmatrix aber gleich 3, so dass das Gleichungssystem unlösbar ist: Die 3 Ebenen haben keinen gemeinsamen Punkt.