Aufgabe 7.98

Welchen Winkel bildet die Schnittgerade der Ebenen $x+2y-z=1$ und $2x+y+3z=1$

a) mit der x–Achse,
b) mit der x–y–Ebene?

Lösung:

Wir ermitteln zunächst die Gleichung der Schnittgerade.

$$\begin{array}{rl} x+2y-\ \ z=1 & |\cdot 2 \\ 2x+\ \ y+3z=1 & |- \\ 2x+4y-2z=2 & |+ \\ 3y-5z=1, & \end{array} \qquad y=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}z,\ \ x=1-2y+z=1-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}z+z=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}z$$

Mit dem Parameter $z=s$ ergibt sich $x=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}s,\ \ y=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}s,\ \ z=s$ und damit als Geradengleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7/3\\5/3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}.$$

Zur Probe überzeugt man sich zunächst leicht davon, dass der Punkt $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ beide Ebenengleichungen erfüllt. Ferner muss der Richtungsvektor der Gerade in beiden Ebenen als Richtungsvektor enthalten sein, also auf ihren Stellungsvektoren senkrecht stehen. Das ist wegen $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}=0$ und $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}=0$ der Fall.

a) Die x–Achse hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, für den Schnittwinkel mit der x–Achse gilt also

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|}=\frac{-7}{\sqrt{83}\cdot 1}=-\frac{7}{\sqrt{83}}$$

und damit $\varphi\approx 140.21^\circ$ bzw. 39.79°, da die Orientierung der Schnittgerade nicht vorgegeben ist.

b) Der Stellungsvektor der x–y–Ebene $z=0$ ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Für den Schnittwinkel der Schnittgerade mit dem Stellungsvektor gilt also

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{3}{\sqrt{83}}$$

und damit $\varphi\approx 70.77^\circ$. Da der Stellungsvektor senkrecht auf der Ebene steht, schneidet die gegebene Schnittgerade die x–y–Ebene im Winkel von 19.23°.