

Aufgabe 7.97

Ermitteln Sie Schnittgerade und Schnittwinkel der Ebenen $x-2y+3z=4$ und $3x+y-5z=5$!

Lösung:

Die Schnittgerade ergibt sich durch Lösung des Gleichungssystems $x-2y+3z=4$, $3x+y-5z=5$, vgl. Aufgabe 6.101:

$$\begin{array}{ccc|c}
 \mathbf{1} & -2 & 3 & 4 \\
 3 & 1 & -5 & 5 \\
 \hline
 1 & -2 & 3 & 4 \\
 \mathbf{0} & 7 & -14 & -7 \\
 \hline
 1 & -2 & 3 & 4 \\
 \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 & -1 \\
 \hline
 1 & \mathbf{0} & -1 & 2 \\
 \mathbf{0} & 1 & -2 & -1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x - z = 4 \quad x = 2 + \lambda \\
 y - 2z = -1 \quad y = -1 + 2\lambda \\
 z = \lambda
 \end{array}$$

Schnittgerade also:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Der Richtungsvektor der Schnittgerade ergibt sich auch als Kreuzprodukt der Stellungsvektoren der beiden Ebenen, dieses wurde bei Aufgabe 7.41a) berechnet, vgl. auch Aufgabe 7.62.)

Die Ebenen schneiden sich im gleichen Winkel wie ihre Stellungsvektoren, so dass sich der

$$\text{Schnittwinkel } \arccos \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = \arccos \left(-\sqrt{\frac{14}{35}} \right) = \arccos \left(-\sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

$\approx 129,23^\circ$ ergibt. Es kann auch der dazu supplementäre Winkel von $50,77^\circ$ angegeben werden.