Aufgabe 7.95

Bestimmen den Mittelpunkt und Radius des Kreises, der bei Rotation des Punktes $(-1,-2,10)$ um die Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ erzeugt wird, sowie die Gleichung der Ebene, in der dieser Kreis liegt!

Lösung:

Den Drehmittelpunkt erhält man durch Fällen des Lot von dem gegebenen Punkt auf die Gerade. Ist $\begin{pmatrix}-1\\-7\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ der Lotfußpunkt, so gilt, da das Lot senkrecht auf Geradenrichtung steht, $\left(\begin{pmatrix}-1\\-7\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\10\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}0\\-5\\-16\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=-100+50t=0$, also $t=2$.

Man kann diese Überlegung auch durch Projektion des Vektors von $(-1,-7,-6)$ nach $(-1,-2,10)$, also von $\begin{pmatrix}0\\5\\16\end{pmatrix}$ auf die Geradenrichtung darstellen, diese ist $\dfrac{\begin{pmatrix}0\\5\\16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\dfrac{100}{50}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

Jedenfalls ist $\begin{pmatrix}-1\\-7\\-6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$ Ortsvektor des Lotfußpunktes. Der Drehmittelpunkt ist somit der Punkt $(5,1,4)$.

Radius des Drehkreises ist die Länge des Lots, also $\left\|\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\10\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}\right\|=9$.

Offensichtlich erfolgt die Bewegung in einer zur Geradenrichtung orthogonalen Ebene. Da diese den Drehmittelpunkt enthält, ergibt sie sich zu $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}\right)=3x+4y+5z-39=0$.

Also erfolgt die Rotation auf einem Kreis mit dem Radius 9 um den Punkt $(5,1,4)$ in der Ebene $3x+4y+5z=39$.