## Aufgabe 7.94

Bestimmen Sie, sofern sie existiert, die Gleichung der Ebene, die zur Ebene $5y-12z=0$ senkrecht ist und die

a) von der $x$-Achse den Abstand 26 hat,
b) von der $y$-Achse den Abstand 5 hat!

## Lösung:

a) Da die gesuchte Ebene orthogonal zur Ebene $5y-12z=0$ sein soll, muss ihr Stellungsvektor orthogonal zum Stellungsvektor $\begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}$ dieser Ebene sein. Ferner darf sie die $x$-Achse nicht schneiden (sonst wäre nämlich der Abstand 0), muss also parallel zur $x$-Achse sein. Damit enthält sie die Richtung der $x$-Achse, d.h. den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Dieser Vektor ist also auch zum Stellungsvektor der gesuchten Ebene orthogonal. Folglich hat die gesuchte Ebene den Stellungsvektor $\begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&5&-12\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-12\\-5\end{pmatrix}\mathrel{\widehat{=}}\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$. Das ist auch der Richtungsvektor jedes auf die gesuchte Ebene gefällten Lotes.

Da der Abstand von der $x$-Achse 26 sein soll, muss die Länge des Lotes von jedem Punkt der $x$-Achse, also auch vom Koordinatenursprung auf die Ebene 26 betragen. Die Länge des angegebenen Richtungsvektors beträgt $\left\|\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{12^2+5^2}=13$. Somit muss der Punkt $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\24\\10\end{pmatrix}$ oder der Punkt $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-24\\-10\end{pmatrix}$ in der Ebene liegen.

Es gibt also zwei Ebenen, die die Bedingungen erfüllen, das sind

$$\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\24\\10\end{pmatrix}\right)=0,\ \text{also}\ \begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\24\\10\end{pmatrix},\ 12y+5z=338\ \text{und}$$

$$\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-24\\-10\end{pmatrix}\right)=0,\ \text{also}\ \begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-24\\-10\end{pmatrix},\ 12y+5z=-338.$$

b) Analog zu den Überlegungen bei a) muss der Stellungsvektor der gesuchten Ebene orthogonal zu $\begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}$ und zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ der zu ihr parallelen $y$-Achse sein. Als Stellungsvektor erhält man damit $\begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&5&-12\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}\mathrel{\widehat{=}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Das ist auch der Richtungsvektor jedes auf die Ebene gefällten Lotes.

Da der Abstand von der $y$-Achse 5 sein soll, muss die Länge des Lotes von jedem Punkt der $y$-Achse, also auch vom Koordinatenursprung auf die Ebene 5 betragen. Wegen $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$ muss einer der Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegen.

Es gibt also zwei Ebenen, die die Bedingungen erfüllen, das sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, \text{ also } x = 5 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, \text{ also } x = -5.$$

(Offensichtlich sind $x = \pm 5$ die beiden zur $y$-$z$-Ebene parallelen Ebenen, die von ihr und damit auch von der in ihr enthaltenen $y$-Achse den Abstand 5 haben.)