Aufgabe 7.91

Gegeben seien die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ und $E_2: \ 2x+8y+z=36$
sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Gleichung der Ebene E_1 in parameterfreier Form an!
b) Ermitteln Sie den Abstand zwischen der Gerade g und der Ebene E_1 sowie den Abstand zwischen der Gerade g und der Ebene E_2 !
c) In welcher Gerade schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2 ?

Lösung:

a) $\begin{array}{ll} x=1+2s+\ t & 2x=2+4s+2t \\ y=4+\ s+2t & \ \ y=4+\ s+2t \\ z=2-2s+3t & \end{array}$ $\quad 2x-y=3s-2, \quad s=\dfrac{2x-y+2}{3},$

$t=x-1-2\dfrac{2x-y+2}{3}=\dfrac{3x-3-4x+2y-4}{3}=\dfrac{-x+2y-7}{3}$

$z=2-2\dfrac{2x-y+2}{3}-3\dfrac{-x+2y-7}{3}, \quad 3z=6-4x+2y-5+3x-6y+21=-x-4y+23,$

parameterfreie Ebenengleichung also: $x+4y+3z=23$

oder:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-2\\1&2&-3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\\z-2\end{pmatrix}=x+4y+3z-23=0$$

b) **Ebene E_1:** Suchen Schnittpunkt durch Einsetzen der Geradengleichung in die parameterfreie Ebenengleichung: $(2+2s)+4(8-5s)+3(5+6s)=2+2s+32-20s+15+18s=49=23$: Widerspruch, kein Schnittpunkt.

Also ist die Gerade g (echt) parallel zur Ebene E_1, fällen deshalb Lot von $(2,8,5)$ auf E_1:

Geradengleichung des Lots: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

Schnittpunkt des Lots mit E_1:
$(2+i)+4(8+4u)+3(5+3u)=2+u+32+16u+15+9u=26u+49=23, \ \ 26u=-26, \ \ u=-1$

Abstand $=$ Länge des Lots $=\left\|-\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{26}\approx 5{,}099$

Ebene E_2: Suchen Schnittpunkt durch Einsetzen der Geradengleichung in die parameterfreie Ebenengleichung: $(2+2s)+8(8-5s)+(5+6s)=4+4s+64-40s+5+6s=-30s+73=36, \ \ -30s=-37, \ \ s=\dfrac{37}{30}$: Schnittpunkt existiert, Abstand folglich gleich 0.

c) In der Schnittgerade sind die Ebenengleichungen $x+4y+3z=23$ und $2x+8y+z=36$ gleichzeitig erfüllt:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 23 \\ 2 & 8 & 1 & 36 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Schnittgerade also $\vec{x}=\begin{pmatrix}17\\0\\2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$