

Aufgabe 7.87

- a) Ermitteln Sie die parameterfreie Gleichung der Ebene, die die Punkte $(3, 1, 1)$ und $(2, 2, 2)$ enthält und zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel ist!
- b) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(-10, 6, -10)$ auf diese Ebene und den Lotfußpunkt!
- c) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(-10, 6, -10)$ von der Ebene?

Lösung:

- a) Die Ebene enthält die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ihr Stellsvektor ist

$$\text{also } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene, so ist $\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$ ein beliebiger Richtungsvektor in der Ebene, damit ergibt sich als parameterfreie Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = (x-3) - 2(y-1) + 3(z-1) = 0, \quad \text{d.h. } x - 2y + 3z = 4.$$

- b) Der Stellsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht auf der Ebene $x - 2y + 3z = 4$ senkrecht, ist also Richtungsvektor des Lotes. Somit lautet die Geradengleichung des Lotes $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt dieser Gerade mit der Ebene, Einsetzen der Gleichung des Lotes in die Ebenengleichung ergibt $(-10+t) - 2(6-2t) + 3(-10+3t) = 4$, $14t - 52 = 4$,

$$14t = 56, \quad t = 4. \quad \text{Der Lotfußpunkt hat somit den Ortsvektor } \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- c) Abstand ist die Länge des Lotes, also $\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = 4 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{14} \approx 14.97$.