Aufgabe 7.86

Betrachtet werden die Dreiecke ABC mit den Eckpunkten $A(1,0,-1)$, $B(2,2,1)$, $C(4,-2,5)$ und DEF mit den Eckpunkten $D(4,4,11)$, $E(5,6,13)$ und $F(7,2,17)$.

a) Zeigen Sie, dass die Dreiecke kongruent und parallel zueinander sind!
b) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ebenen, in denen die Dreiecke liegen, in parameterfreier Form!
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke!
d) Die beiden Dreiecke seien Grund- und Deckfläche eines Prismas. Bestimmen Sie dessen Seitenlängen, Höhe und Volumen!

Lösung:

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$.

Also geht das Dreieck DEF aus dem Dreieck ABC durch Parallelverschiebung hervor, so dass die Dreiecke kongruent sind und parallel zueinander liegen.

oder $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{FD}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-6\end{pmatrix}$.

Da die Dreiecksseiten durch parallele Vektoren beschrieben werden, sind die Dreiecke kongruent und liegen parallel zueinander.

b) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}16\\0\\-8\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

ABC liegt in der Ebene $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=0$, d.h. $2x-z=3$.

DEF liegt in der Ebene $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\11\end{pmatrix}\right)=0$, d.h. $2x-z=-3$.

c) Fläche $=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}16\\0\\-8\end{pmatrix}\right\|=4\left\|\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|=4\sqrt{5}$

d) Die Seitenlängen der Grund- und der Deckfläche sind $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{DE}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|=3$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\right\|=6$ und $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\left\|\overrightarrow{FD}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\2\\-6\end{pmatrix}\right\|=7$, die der Verbindungsstrecken ist $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BE}\right\|=\left\|\overrightarrow{CF}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right\|=13$.

Die Höhe des Prismas ist die Länge der Projektion des Seitenvektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

also $\left\| \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left| -\dfrac{6}{5} \right| \sqrt{5} = \dfrac{6}{5}\sqrt{5} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Man kann die Höhe auch durch Fällen des Lotes von einem Punkt der Deckfläche, z.B. von $D(4,4,11)$ auf die Ebene $x-2z=3$, in der die Grundfläche liegt, bestimmen. Die Geradengleichung dieses Lotes lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt für den Lotfußpunkt $2(4+2t)-(11-t)=3$, d.h. $5t=6$, $t=\dfrac{6}{5}$, so dass $\left\| \dfrac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{6}{5}\sqrt{5} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ die Länge des Lotes und damit die Höhe ist.

Das Volumen des Prismas ergibt sich dann aus Grundfläche $*$ Höhe zu $4\sqrt{5} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{5}} = 24$.

Man kann das Volumen des Prismas auch als das halbe Volumen des von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannten Spates berechnen:

$$V = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-24+24+36+12-72-24| = \frac{1}{2} |-48| = 24.$$