

### Aufgabe 7.80

Gegeben seien die Punkte  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 3, 0)$ ,  $C(3, 1, -2)$  und  $D(-8, 3, -4)$ .

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  !
- Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene  $E$  durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  in parameterfreier Form!
- Bestimmen Sie die Geradengleichung des Lotes von  $D$  auf die Ebene  $E$  !
- Ermitteln Sie den Fußpunkt dieses Lotes und den Abstand zwischen dem Punkt  $D$  und der Ebene  $E$  !
- In welchem Winkel schneidet die Gerade durch die Punkte  $D$  und  $A$  die Ebene  $E$  ?

### Lösung:

$$a) F = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{26} \approx 2,55$$

$$b) \text{Normalenvektor } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 4x - y + 3z - 5 = 0,$$

parameterfreie Ebenengleichung also  $4x - y + 3z = 5$

c) Die Normalenrichtung ist auch die Richtung des Lotes, die Geradengleichung des Lotes lautet somit  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

d) Einsetzen der Geradengleichung des Lotes in die Ebenengleichung ergibt  $4(-8+4t) - (3-t) + 3(-4+3t) = -32 + 16t - 3 + t - 12 + 9t = 26t - 47 = 5$ ,  $26t = 52$ ,  $t = 2$ .

Ortsvektor des Lotfußpunktes ist somit  $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

Abstand die Länge des Lots, also  $2 \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{26} \approx 10,20$ .

e) Richtung der Gerade durch  $D$  und  $A$ :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Der gesuchte Winkel ist komplementär zum Winkel zwischen der Geradenrichtung und der

Normalenrichtung der Ebene, dieser ist  $\arccos \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{52}{\sqrt{107} \sqrt{26}} \approx$

$9,64^\circ$ . Die Gerade schneidet die Ebene also unter einem Winkel von ca.  $80,36^\circ$ .