Aufgabe 7.77

Die Punkte $A(3,0,-1)$, $B(3,3,0)$ und $C(7,3,1)$ liegen in der Ebene E.

a) Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene E und die Gleichung der Ebene in parameterfreier Form!
b) Zerlegen Sie den Vektor $\overrightarrow{AC}$ in eine zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ parallele und eine zu diesem orthogonale Komponente!
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC **sowohl** mithilfe des Ergebnisses von a) **als auch** mithilfe des Ergebnisses von b)!
d) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $(13,20,-20)$ auf die Ebene E und den Abstand dieses Punktes von der Ebene!

Lösung:

a) Normalenvektor: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=3(x-3)+4y-12(z-1)=0,$

d.h. $3x+4y-12z=21$

b) parallele Komponente: $\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AB}=\dfrac{\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\dfrac{11}{10}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\33/10\\11/10\end{pmatrix}$

orthogonale Komponente: $\overrightarrow{AC}-\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\33/10\\11/10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3/10\\9/10\end{pmatrix}$

c) Fläche $=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{169}=\dfrac{13}{2}$

bzw.: Die orthogonale Komponente aus b) ist die Höhe des Dreiecks über der Grundseite AB.

Fläche $=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}4\\-3/10\\9/10\end{pmatrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{16+\dfrac{9}{100}+\dfrac{81}{100}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{\dfrac{169}{10}}=\dfrac{13}{2}$

d) Geradengleichung des Lotes: $\vec{x}=\begin{pmatrix}13\\20\\-20\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt für den Lotfußpunkt
$3(13+3t)+4(20+4t)-12(-20-12t)=39+80+240+169t=21$, d.h. $169t=-338$, $t=-2$

Ortsvektor des Lotfußpunkts: $\begin{pmatrix}13\\20\\-20\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\12\\4\end{pmatrix}$

$$\text{Abstand} = \text{Länge des Lots} = \left\| -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| = 26$$