

Aufgabe 7.73

- a) Zeigen Sie, dass die Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen!
- b) Geben Sie die Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an!
- c) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(6, 14, -12)$ auf diese Ebene sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene!

Lösung:

- a) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt wegen $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ in der von den Richtungsvektoren der beiden Geraden aufgespannten Ebene. Somit liegen die beiden gegebenen Geraden in einer Ebene.

b) Es gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Also lautet die Ebenengleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 0$, d.h. $x + 2y - 5z = 4$.

- c) Die Gerade, auf der das Lot liegt, hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Sie schneidet die Ebene für t mit $6+t+28+4t+60+25t=4$, also $t=-3$. Der Lotfußpunkt ist somit $(3, 8, 3)$.

Abstand ist die Länge des Lots, also $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| = \left\| -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{30} \approx 16,43$.