

Aufgabe 7.72

Die Ebene E sei durch die Punkte $(2, 1, 0)$, $(5, 2, 1)$ und $(4, 0, 0)$ gegeben.

- Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!
- Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen an!
- Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der Ebene $x + 3y + z = 3$!
- Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(6, 14, -12)$ auf die Ebene E sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E !

Lösung:

- a) Bestimmung der Richtungsvektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\vec{u} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bestimmung des Normalenvektors: } \vec{n} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bestimmung der rechten Seite durch Einsetzen eines Punktes der Ebene: } \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Rightarrow E: \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y - 5z = 4$$

- b) x -Achse: $y = z = 0 \quad x = 4, \quad \text{Punkt } (4, 0, 0)$
 y -Achse: $x = z = 0 \quad 2y = 4, \quad \text{Punkt } (0, 2, 0)$
 z -Achse: $x = y = 0 \quad -5z = 4, \quad \text{Punkt } (0, 0, -4/5)$

$$x\text{-}y\text{-Ebene: } z = 0 \quad x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x\text{-}z\text{-Ebene: } y = 0 \quad x - 5z = 4 \Rightarrow x = 4 + 5z, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y\text{-}z\text{-Ebene: } x = 0 \quad 2y - 5z = 4 \Rightarrow y = 2 + 5/2z, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- c) Einsetzen der Parameterform der Ebene E in die Gleichung der 2. Ebene:

$$(2 + 3s + 2t) + 3(1 + s - t) + s = 3 \Rightarrow 2 + 7s - t = 0$$

$$t = 2 + 7s \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2 + 7s) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Richtung des Lotes ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ der Ebene E

Bestimmung des Schnittpunktes von $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $x + 2y - 5z = 4$:

$$6 + t + 2(14 + 2t) - 5(-12 - 5t) = 4 \implies 94 + 30t = 4 \implies t = -3$$

Schnittpunkt ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$: Lotfußpunkt

$$\text{Abstand: } \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{1+4+25} = 3\sqrt{30} \approx 16.43$$